1 Aufgabe. Thema Polynome

Beweisen Sie: ein Polynom $f\colon C \to C$ nimmt genau dann für alle $x \in X$ reelle Werte an, wenn seine Koeffizienten reell sind.

2 Aufgaben zum Thema Stetigkeit

1) Zu $a, b, c \in R$ mit $a > 0$ bestimme man α, β so, dass
$\underset{x\to\infty}{lim}\left(\sqrt{ax^2+bx+c}-\alpha x-\beta\right)=0$

2) Jedes reelle Polynom ungeraden Grades hat eine reelle Nullstelle.

3) Die Funktion $f\colon\ [0;1] \to R$ sei stetig, und es sei $f(0) = f(1)$. Dann gibt es ein $c \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ mit $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$.
4) Man bestimme die folgenden Grenzwerte:

1. $\lim\limits_{x\to 0} x \cot x$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x}$
3. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\tan x - \frac{1}{\cos x}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x}\right)$

5) Man bestimme die stetige Fortsetzung von der Funktion $f(x) = \frac{x}{e^x-1}$.
6*) Man zeige, dass $f(x) = \sqrt{|x|}$ überall stetig ist. Hinweis: Machen Sie eine Fallunterscheidung. Für den Fall $x_0 < \epsilon\sqrt{x_0}$ überlegen Sie sich, was δ ist.

7)* Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x}{x-1}, x \neq 1$
a) Für $x_0 \neq 1$ ermittle man $\delta(\epsilon, x_0)$, so dass für alle x mit $|x - x_0| < \delta(\epsilon, x_0)$ gilt $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$
b) Man berechne $\delta(\epsilon, x_0)$ für $\epsilon = 0,01$ und $x_0 = 2, x_0 = 1,1, x_0 = 0,999$.
Hinweis: Für die Abschätzung $|f(x) - f(x_0)|$ benutzen Sie folgende Identität: $||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$. Leiten Sie mit dieser Abschätzung den Wert von δ ab.

3 Aufgaben zum Thema Differenzierbarkeit

1) Man berechne die Ableitung nach x von:
a) $f(x) = e^{ax}\sin(\omega x + a)$,
b) $f(x) = \cos(\sin(\cos(x^2)))$.

2) Man berechne die Ableitung nach x, dort wo die Funktion differenzierbar ist:
a) $f(x) = |x|$
b) $f(x) = x\sqrt{|x|}$.

3) Für welche $a \in R_+$ ist die Funktion $f\colon R \to R$ mit $f(x)\colon = |x|^a sin\frac{1}{x}$ für $x \neq 0$ und $f(0)\colon = 0$ im Nullpunkt differenzierbar? Gegebenfalls berechne man die Ableitung.

4) Klausuraufgabe. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 4|x-1|^3 + |x|^3, -\infty < x < \infty$.
a) Man zeige: $f(x) > 0$ für alle x. Welchen Wert strebt $f(x)$ zu, falls $x \to \pm\infty$?

b) Man berechne $f'(x)$

c) Man zeige: $f''(x) = \begin{cases} -30x + 24 & , x \leq 0 \\ -18x + 24 & , 0 < x \leq 1 \\ 30x - 24 & , x > 1 \end{cases}$

d) Man zeige, dass $f(x)$ für alle x zweimal differenzierbar ist.