TU-München, Dienstag, der 16.03.2010

Übungsblatt

Analysis I - Ferienkurs

Andreas Schindewolf

1 Folgen

Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz bzw. Divergenz und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

a)

$$a_n = \left(\frac{3+4i}{5}\right)^n. \tag{1.0.1}$$

Lösung:

Es wird geprüft, ob die Folge eine Cauchy-Folge ist. Dies ist sie genau dann, wenn sie konvergiert. Dafür muss gelten

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}, \text{ sodass } |c_n - c_m| < \varepsilon\ \forall n, m \geq N. \tag{1.0.2}$$

Betrachte den „Abstand“ zweier aufeinander folgender Folgeglieder.

$$|a_{n+1} - a_n| = \left|\left(\frac{3+4i}{5}\right)^{n+1} - \left(\frac{3+4i}{5}\right)^n\right| = \left|\left(\frac{3+4i}{5}\right)^n\right|\left|\frac{3+4i}{5} - 1\right| =$$

$$= \underbrace{\left|\frac{3}{5} + i\frac{4}{5}\right|^n}_{=1} \underbrace{\left|-\frac{2}{5} + i\frac{4}{5}\right|}_{=\frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}. \tag{1.0.3}$$

Die Folge ist also keine Cauchy-Folge, da leicht ein ε gefunden werden kann mit $\varepsilon < \frac{2\sqrt{5}}{5}$, und folglich nicht konvergent sondern divergent.

b)

$$a_n = \sqrt{n^2+n} - n. \tag{1.0.4}$$

Lösung:

Es wird versucht den Grenzwert so um zu formen, dass man bekannte Grenzwerte erhält (insbesondere $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$).

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - n = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+n} - n\right)\left(\sqrt{n^2+n} + n\right)}{\sqrt{n^2+n} + n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}. \tag{1.0.5}$$

c)

$$a_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right). \tag{1.0.6}$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $a_n = \frac{n+1}{2n}$.

Lösung:

Zunächst wird die Folge auf eine Form eines großen Bruches gebracht, indem sich ähnlich zur Teleskopsumme alle bis auf endlich viele Terme aufheben.

$$a_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{k^2 - 1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right) =$$

$$= \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-2) \cdot n}{(n-1) \cdot (n-1)} \cdot \frac{(n-1) \cdot (n+1)}{n \cdot n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n}. \tag{1.0.7}$$

Somit ist die Folge bereits auf die Form im Hinweis gebracht. Nun leitet kann der Grenzwert wie üblich von anderen Grenzwerten abgeleitet werden.

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \frac{1}{n}}{1} = \frac{1}{2}. \tag{1.0.8}$$

2 Rekursiv definierte Folgen

Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_0 = 2, \quad a_n = \frac{3}{4 - a_{n-1}} \forall n \geq 1. \tag{2.0.9}$$

Zeigen Sie, dass die Folge konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Folge monoton fallend/steigend und beschränkt ist.

Lösung:

Zunächst wird durch vollständige Induktion gezeigt, dass die Folge monoton fallend ist.

Induktsionsanfang zunächst wird gezeigt, dass $a_0 \geq a_1$.

$$a_0 = 2 > \frac{3}{2} = \frac{3}{4-2} = \frac{3}{4 - a_0} = a_1. \tag{2.0.10}$$

Induktionsvorraussetzung Es sei bereits gezeigt, dass die Folge bis n monoton fallend ist.

$$2 = a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_{n-1} \geq a_n. \tag{2.0.11}$$

Induktionsschluss Nun bleibt zu zeigen, dass $a_n \geq a_{n+1}$.

$$a_n = \frac{3}{4 - a_{n-1}} \underbrace{\geq}_{\substack{\text{Nach IV ist } 2 \geq a_{n-1} \geq a_n \text{ und} \\ \text{folglich } 4 - a_n \geq 4 - a_{n-1} > 0}} \frac{3}{4 - a_n} = a_{n+1}. \tag{2.0.12}$$

Da die Folge monoton fallend ist, ist sie zwangsläufig auch nach oben beschränkt. Damit die Folge beschränkt ist, muss sie auch noch nach unten beschränkt sein. Dies lässt sich zeigen, indem ausnutzt, dass die Funktion monoton fallend ist.

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{3}{4 - a_{n-1}} \underbrace{\geq}_{\substack{\text{da } (a_n) \text{ monoton fallend} \\ \text{und } a_{n-1} < 2}} \lim_{m \to -\infty} \frac{3}{4 - m} = 0. \tag{2.0.13}$$

$s = 0$ ist also eine untere Schranke der Folge (a_n).

Da die Folge nach oben und nach unten beschränkt ist, ist die Folge beschränkt.

Da die Folge beschränkt und monoton fallend/steigend ist, muss sie auch konvergent sein.

Nun soll der Grenzwert a noch berechnet werden

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{4 - \lim_{n\to\infty} a_{n-1}} = \frac{3}{4-a} \tag{2.0.14}$$

$$\implies 4a - a^2 = 3 \tag{2.0.15}$$

$$\implies a^2 - 4a + 3 = 0. \tag{2.0.16}$$

Man bekommt $a \in \{1, 3\}$. Da der Grenzwert allerdings wohldefiniert ist, kann nur eines der Ergebnisse richtig sein. Und da $a_n < 2$ muss folglich gelten $a = 1$.

3 Häufungspunkte

a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ mit $W := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ endlich. Zeigen Sie, dass h aus W existiert, so dass h häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

Lösung:

Beweis durch Widerspruch. Seien $h_1, \ldots, h_k$ die Elemente von W.

Nehme an, kein Element von W ist Häufungspunkt von (a_n). Dann gibt es keine Teilfolge von (a_n), die gegen h_1 konvergiert. Also gibt es $\varepsilon_1 > 0$ und $N_1 \in \mathbb{N}$, so dass $a_n \notin U_{\varepsilon_1}(h_1) := \{c \in \mathbb{C}, |c - h_1| < \varepsilon_1\}$ $\forall n > N_1$. Analoges gilt für h_l mit $l = 2, \ldots, k$.

Also gilt für $n > \max\{N_1, \ldots, N_k\}$

$$a_n \notin U_{\varepsilon_1}(h_1) \cup \ldots \cup U_{\varepsilon_k}(h_k). \tag{3.0.17}$$

Das steht im Widerspruch zu

$$W = \{a_n : n \in \mathbb{RN}\} = \{h_1, \ldots, h_k\} \subset U_{\varepsilon_1}(h_1) \cup \ldots \cup U_{\varepsilon_k}(h_k). \quad ↯ \tag{3.0.18}$$

b) Bestimmen Sie für die nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ - gegebenenfalls in $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ - den Limes superior, den Limes inferior und alle Häufungspunkte.

$$a_n := (-1)^n \frac{n-1}{n+1}, \tag{3.0.19}$$

$$a_n := (-3)^n + \big((-1)^n + 1\big)5^n. \tag{3.0.20}$$

Lösung:

1. $a_n := (-1)^n \frac{n-1}{n+1}$.

   Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} (-1)^{2n} \frac{2n-1}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{2n}}{1 + \frac{1}{2n}} = 1 \tag{3.0.21}$$

   und

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} -\frac{1 - \frac{1}{2n+1}}{1 + \frac{1}{2n+1}} = -1. \tag{3.0.22}$$

   1 und -1 sind also Grenzwerte von Teilfolgen von (a_n) und damit Häufungspunkt.

Es gibt keine weiteren Häufungspunkte, denn jede konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ hat unendlich viele gerade oder unendlich viele ungerade n_k, konvergiert also gegen 1 oder -1.

Da 1 größter Häufungspunkt ist, gilt $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$.

Da -1 kleinster Häufungspunkt ist, gilt $\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$.

Da (a_n) zwei Häufungspunkte hat, ist die Folge weder konvergent noch uneigentlich konvergent.

2. $a_n := (-3)^n + \big((-1)^n + 1\big)5^n$.

   Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} (-3)^{2n} + \left((-1)^{2n} + 1\right) 5^{2n} = \lim_{n\to\infty} 3^{2n} + 2 \cdot 5^{2n} = \infty \qquad (3.0.23)$$

   und

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (-3)^{2n+1} = -\infty. \qquad (3.0.24)$$

   ∞ und $-\infty$ sind also Häufungspunkte der Folge in $\overline{\mathbb{R}}$.

   Es gibt keine weiteren Häufungspunkte, denn jede Teilfolge (a_n) hat unendlich viele k mit n_k gerade oder unendlich viele k mit n_k ungerade.

   Da die Folge nicht nach oben beschränkt ist, gilt $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$.

   Da die Folge nicht nach unten beschränkt ist, gilt $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

   Da $\limsup_{n\to\infty} a_n \neq \liminf_{n\to\infty} a_n$, ist die Folge weder konvergent noch uneigentlich konvergent.

4 Komplexe Folgen

Betrachten Sie die folgenden Aussagen über eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$.

(1) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

(2) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge.

(3) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.

(4) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat genau einen Häufungspunkt.

(5) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat mehr als einen Häufungspunkt.

(6) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und nicht konvergent.

Untersuchen Sie, welche der folgenden Implikationen richtig bzw. falsch sind. Geben Sie gegebenfalls ein Gegenbeispiel an.

a) (1) $\Longrightarrow$ (2), b) (2) $\Longrightarrow$ (1), c) (3) $\Longrightarrow$ (1), d) (2) $\Longrightarrow$ (4), e) (4) $\Longrightarrow$ (1),
f) (3), (4) $\Longrightarrow$ (1), g) (6) $\Longrightarrow$ (5).

Lösung:

a) (1) $\Longrightarrow$ (2) gilt (siehe Vorlesung).

b) (2) $\Longrightarrow$ (1) gilt (siehe Vorlesung).

c) (3) $\Longrightarrow$ (1) ist falsch. $a_n = (-1)^n$ ist ein Gegenbeispiel.

d) (2) $\Longrightarrow$ (4) gilt, da jede Cauchy-Folge konvergiert und eine konvergente Folge genau einen Häufungspunkt hat.

e) (4) $\Longrightarrow$ (1) ist falsch. $a_n = (1 + (-1)^n)n$ ist ein Gegenbeispiel. Zwar gibt es eine Teifolge, die konvergiert, wenn die Folge einen Häufungspunkt besitzt. Allerdings kann die Folge wie im Gegenbeispiel zusötzlich eine Teilfolge enthalten, die nicht konvergiert.

f) (3), (4) $\Longrightarrow$ (1) gilt. Sei h der Häufungspunkt der Folge (a_n). Wäre h nicht der Grenzwert der Folge (a_n), so gäbe es ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $N \in \mathbb{N}$ ein $n > N$ existiert mit $|a_n - h| > \varepsilon$. Es gibt also eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von (a_n) mit $a_{n_k} \in \mathbb{C}\setminus\{z \in \mathbb{C} : |z - h| \leq \varepsilon\}$. Da die Gesamtfolge beschränkt ist, ist auch diese Teilfolge beschränkt, besitzt also nach Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge, die gegen ein $s \in \mathbb{C}\setminus\{z \in \mathbb{C} : |z - h| \leq \varepsilon\}$ konvergiert. Insbesondere gilt also $s \neq h$. Damit hätte die Folge (a_n) zwei verschiedene Häufungspunkte s und h. $\lightning$

g) (6) $\Longrightarrow$ (5) gilt, da nach Bolzano-Weierstraß jede beschränkte Folge (mindestens) einen Häufungspunkt besitzt. Besäße die Folge nur genau einen Häufungspunkt, dann würde, wie in f) bereits gezeigt, die Folge konvergieren. $\lightning$

5 Reihen

a) Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz bzw. Divergenz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^4}{k^5 + \sqrt{k^{10}+1}}, \tag{5.0.25}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}. \tag{5.0.26}$$

Lösung:

1. *Behauptung:* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^4}{k^5+\sqrt{k^{10}+1}}$ ist divergiert.

   Beweis: Sei

   $$a_k := \frac{(k+1)^4}{k^5 + \sqrt{k^{10}+1}} = \frac{1}{k} \underbrace{\frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^4}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{k^{10}}}}}_{=:b_k}. \tag{5.0.27}$$

   Folglich gilt

   $$\lim_{n\to\infty} b_k = \frac{1}{2}. \tag{5.0.28}$$

   insbesondere gibt e ein $N \in \mathbb{N}$ mit $b_k > \frac{1}{4}$ für $k > N$. Es gilt aber

   $$a_k = \frac{(k+1)^4}{k^5 + \sqrt{k^{10}+1}} > \frac{1}{4}\frac{1}{k} \;\forall k > N. \tag{5.0.29}$$

   Würde die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergieren, so würde nach dem Majorantenkriterium wegen (5.0.29) auch die harmonische Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ konvergieren. $\lightning$

2. *Behauptung:* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ konvergiert.

   Beweis: Sei

   $$b_k := \frac{1}{\sqrt{k}}. \tag{5.0.30}$$

Die Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine monoton fallende Nullfolge. Nach dem Leibnizschen Konvergenz-Kriterium konvergiert also die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k b_k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}. \tag{5.0.31}$$

b) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} \tag{5.0.32}$$

konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert.

Lösung:

Wegen $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$ ist

$$\frac{2k+1}{(k+1)^2k^2} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)^2k^2} - \frac{k^2}{(k+1)^2k^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}. \tag{5.0.33}$$

Also ist für $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}. \tag{5.0.34}$$

Damit folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = 1. \tag{5.0.35}$$

6 Absolute Konvergenz

a) Seien $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergente Reihen. Zeigen Sie, dass auch die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(a_k - b_k)$ absolut konvergiert.

Lösung:

Nach der Dreiecksungleichung gilt

$$|a_k - b_k| \leq \underbrace{|a_k| + |b_k|}_{c_k} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{6.0.36}$$

Da $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|a_k|$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|b_k|$ nach Vorraussetzung konvergieren, konvergiert auch $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$.

Aus (6.0.36) und dem Majoranten-Kriterium folgt, dass auch $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|a_k - b_k|$ konvergiert.

D.h. die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(a_k - b_k)$ konvergiert absolut.

b) Untersuchen Sie welches Konvergenzverhalten (Konvergenz, absolute Konvergenz, Divergenz) die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k}{k} + \frac{k+1}{k^3}\right) \tag{6.0.37}$$

aufweißt.

Hinweis: Es darf hergenommen werden, dass die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ konvergiert.

Lösung:

Dehauptung: die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k}{k}+\frac{k+1}{k^3}\right)$ konvergiert, ist aber nicht absolut konvergent.

Beweis: Die alternierende harmonische Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}$ konvergiert nach dem Leibnizschen Konvergenz-Kriterium.

Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ konvergiert (siehe Hinweis) und da $\frac{1}{k^3}<\frac{1}{k^2}$ konvergiert auch die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}$ nach dem Majoranten-Kriterium.

Also konvergiert auch die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{(-1)^k}{k}+\frac{k+1}{k^3}\right)}_{=:a_k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3} \tag{6.0.38}$$

und die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{\frac{k+1}{k^3}}_{=:b_k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}. \tag{6.0.39}$$

Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k$ konvergiert sogar absolut, da $b_k>0\ \forall k\in\mathbb{N}$.

Würde auch $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ absolut konvergieren, dann würde nach a) auch

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k} \tag{6.0.40}$$

absolut konvergieren.

Diese Reihe konvergiert aber nicht absolut, da die harmonische Reihe divergiert.

Also ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ konvergent aber nicht absolut konvergent.

7 Exponentialreihe

Zeigen Sie, dass die die Exponentialreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$ mit $z\neq 0, z\in\mathbb{C}$ absolut konvergiert.

Lösung:

Mit dem Quotienten-Kriterium folgt für $z\neq 0$:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{z^{k+1}}{(k+1)!}\cdot\frac{k!}{z^k}\right|=|z|\frac{k!}{(k+1)!}=|z|\frac{1}{k+1}\leq\frac{1}{2}\ \forall k\geq 2|z|-1. \tag{7.0.41}$$

Daher konvergiert die Exponentialreihe absolut.