TU-München, Dienstag, der 16.03.2010

Übungsblatt

Analysis I - Ferienkurs

Andreas Schindewolf

1 Folgen

Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz bzw. Divergenz und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

a)

$$a_n = \left(\frac{3+4i}{5}\right)^n. \tag{1.0.1}$$

b)

$$a_n = \sqrt{n^2+n} - n. \tag{1.0.2}$$

c)

$$a_n = \prod_{k=2}^{n} 1 - \frac{1}{k^2}. \tag{1.0.3}$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $a_n = \frac{n+1}{2n}$.

2 Rekursiv definierte Folgen

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_0 = 2, \quad a_n = \frac{3}{4 - a_{n-1}} \forall n \geq 1. \tag{2.0.4}$$

Zeigen Sie, dass die Folge konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert.

3 Häufungspunkte

a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ mit $W := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ endlich. Zeigen Sie, dass h aus W existiert, so dass h häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

b) Bestimmen Sie für die nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ - gegebenenfalls in $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ - den Limes superior, den Limes inferior und alle Häufungspunkte.

$$a_n := (-1)^n \frac{n-1}{n+1}, \tag{3.0.5}$$

$$a_n := (-3)^n + \big((-1)^n + 1\big)5^n. \tag{3.0.6}$$

4 Komplexe Folgen

Betrachten Sie die folgenden Aussagen über eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$.

(1) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

(2) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge.

(3) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.

(4) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat genau einen Häufungspunkt.

(5) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat mehr als einen Häufungspunkt.

(6) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und nicht konvergent.

Untersuchen Sie, welche der folgenden Implikationen richtig bzw. falsch sind. Geben Sie gegebenfalls ein Gegenbeispiel an.

a) (1) $\Longrightarrow$ (2), b) (2) $\Longrightarrow$ (1), c) (3) $\Longrightarrow$ (1), d) (2) $\Longrightarrow$ (4), e) (4) $\Longrightarrow$ (1), f) (3), (4) $\Longrightarrow$ (1), g) (6) $\Longrightarrow$ (5).

5 Reihen

a) Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz bzw. Divergenz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^4}{k^5+\sqrt{k^{10}+1}}, \tag{5.0.7}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}. \tag{5.0.8}$$

b) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} \tag{5.0.9}$$

konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert.

6 Absolute Konvergenz

a) Seien $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergente Reihen. Zeigen Sie, dass auch die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (a_k - b_k)$ absolut konvergiert.

b) Untersuchen Sie welches Konvergenzverhalten (Konvergenz, absolute Konvergenz, Divergenz) die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k}{k} + \frac{k+1}{k^3} \right) \tag{6.0.10}$$

aufweißt.

7 Exponentialreihe

Zeigen Sie, dass die die Exponentialreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ mit $z \neq 0, z \in \mathbb{C}$ absolut konvergiert.