Ferienkurs Analysis 1: Übungsblatt 1

Marta Krawczyk, Andreas Schindewolf, Simon Filser

15.3.2010

1 Aufgaben zur vollständigen Induktion

1.1 Verallgemeinerte geometrische Summenformel

1. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für $a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$ und $n \in \mathbb{N}$ die verallgemeinerte geometrische Summenformel gilt.

$$\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}. \tag{1}$$

Lösung:

(a) **Induktionsanfang:** Zunächst wird geprüft, ob die Formel für $n = 1$ stimmt.

$$\sum_{k=0}^{1} a^k b^{1-k} = a^0 b^1 + a^1 b^0 = b + a = \frac{(a+b)(a-b)}{a-b} = \frac{a^2 - b^2}{a - b}. \tag{2}$$

(b) **Induktionsvoraussetzung:** Die Induktionsvorraussetzung ist, dass die Formel für alle Fälle $1, \ldots, n$ gilt.

(c) **Induktionsschluss:** Nun ist zu zeigen, dass die Formel, wenn sie schon bis n gilt, auch für $n + 1$ gültig ist.

$$\sum_{k=0}^{n+1} a^k b^{n+1-k} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}}_{ausIV:=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}} * b^1 + a^{n+1} b^0 = \frac{a^{n+1}b - b^{n+2}}{a-b} + \frac{a^{n+1}(a-b)}{a-b} = \frac{a^{n+2} - b^{n+2}}{a-b}. \tag{3}$$

2. Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $7^n - 1$ durch 6 teilbar ist.

Lösung: Setzt man in der bereits bewiesenen verallgemeinerten geometrischen Summenformel $a = 7$ und $b = 1$ (dies erfüllt offensichtlich die Bedingunen $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$), erhält man

$$\frac{7^{n+1} - 1^{n+1}}{6} = \frac{7^{n+1} - 1}{6} = \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}. \tag{4}$$

Da in diesem Fall $a, b \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{N}$ abgeschlossen bezüglich Addition und Multiplikation folgt

$$\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Demnach ist jedes um Eins verringerte Vielfache von Sieben durch Sechs teilbar.

1.2 Zwei weitere Summenformeln

1. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2. \tag{6}$$

Lösung:

(a) **Induktionsanfang:** Zunächst wird geprüft, ob die Formel für $n = 1$ stimmt.

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = \left(\frac{2}{2}\right)^2 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2. \tag{7}$$

(b) **Induktionsvoraussetzung:** Die Induktionsvorraussetzung ist, dass die Formel für alle Fälle $1, \ldots, n$ gilt.

(c) **Induktionsschluss:** Nun ist zu zeigen, dass die Formel, wenn sie schon bis n gilt, auch für $n + 1$ gültig ist.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k^3}_{\text{aus IV: } =\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{(4n+4)(n+1)^2}{4} = \tag{8}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2. \tag{9}$$

2. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{(n+1)}. \tag{10}$$

Lösung:

(a) **Induktionsanfang:** Zunächst wird geprüft, ob die Formel für $n = 1$ stimmt.

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2}. \tag{11}$$

(b) **Induktionsvoraussetzung:** Die Induktionsvorraussetzung ist, dass die Formel für alle Fälle $1, \ldots, n$ gilt.

(c) **Induktionsschluss:** Nun ist zu zeigen, dass die Formel, wenn sie schon bis n gilt, auch für $n + 1$ gültig ist:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}}_{\text{aus IV: } =\frac{n}{(n+1)}} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} \tag{12}$$

2 Aufgaben zu Intervallschachtelungen und Abzählbarkeit

2.1 Direkte und indirekte Beweise.

Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Wenn $n \in \mathbb{N}$ gerade ist, dann auch n^2.

b) $n \in \mathbb{N}$ ist gerade, wenn n^2 gerade ist.

c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es n aufeinanderfolgende Zahlen, die keine Primzahlen sind.

d)Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Lösung:

a) Direkter Beweis. $n \in \mathbb{N}$ gerade heißt, dass es sich durch $n = 2 \cdot k$ darstellen lässt, mit $k \in \mathbb{N}$. Das bedeutet, dass $n^2 = 2 \cdot (2 \cdot k^2)$. Somit ist n^2auch gerade.

b) Diese Aussage lässt sich durch Kontraposition beweisen, d.h. $A \Rightarrow B \Longleftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$. Ansonsten ein direkter Beweis. A:= "n^2 ist gerade", B:= "$n \in \mathbb{N}$ ist gerade". Also ist es folgende Aussage zu beweisen: Aus $n \in \mathbb{N}$ ungerade folgt n^2 ungerade. Wenn $n \in \mathbb{N}$ ungerade ist, lässt es sich als $n = 2 \cdot k + 1$ darstellen ($k \in \mathbb{N}$). Also ist $n^2 = (2 \cdot k + 1)^2 = 4 \cdot k^2 * 4 \cdot k + 1 = 2 \cdot (2 \cdot k^2 + 2 \cdot k) + 1$ ungerade. q.e.d.

c) Vorbemerkung: Für $k, n \in \mathbb{N}$ definiert man $k|n\colon \Longleftrightarrow m \in N\colon k \cdot m = n$, in Worten "k teilt n (ohne Rest)". 2|n ist also z. B. gleichbedeutend mit "n ist gerade".

Für $n \in \mathbb{N}$ definiert man

n ist prim $:\Longleftrightarrow (\exists_1 k > 1\colon k|n)$

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. $N := (n+1)!$. Dann ist $N + 2$ durch 2 teilbar, weil $N + 2 = (n+1)! + 2 = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n + 2$. Dann ist $N + 3$ durch 3 teilbar, . . . , $N + n + 1$ durch $n + 1$ teilbar. Somit sind die n aufeinanderfolgenden Zahlen N + 2, . . . ,N + n + 1 keine Primzahlen.

d) Beweis durch Widerspruch. Es wird angenommen, es gibt nur endlich viele Primzahlen. Es gibt also eine größte Primzahl m. Nun ist $m!$ durch alle Primzahlen teilbar, somit ist $m! + 1$ durch keine Primzahl teilbar, muss also selbst eine Primzahl sein.Wegen $m! + 1 > 1$ ist das ein Widerspruch zur Annahme, dass m die größte Primzahl ist.

2.2 Intervallschachtelung.

Es sei $0 < a < b$. Man definiere Intervalle $[a_n; b_n], n \in \mathbb{N}$, rekursiv durch $[a_0; b_0]\colon = [a; b]$, sowie durch $a_{n+1}\colon = G(a_n, b_n)$ und $b_{n+1}\colon = A(a_n, b_n)$, wobei $G(a,b)\colon = \sqrt{ab}$, $A(a,b)\colon = \frac{a+b}{2}$. Man zeige, dass sie eine Intervallschachtelung bilden. Gehen Sie wie folgt vor:

a) Beweisen Sie $a < G(a,b) < A(a,b) < b$.

b) Beweisen Sie $a_n < b_n, n \in \mathbb{N}_0$.

c) Zeigen, dass die Intervalle $I_n\colon = [a_n; b_n]$ eine Intervallschachtelung bilden.

Lösung:

a) Direkter Beweis. $a < \sqrt{ab} \Leftrightarrow a^2 < ab \Leftrightarrow a < b$

$\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow ab < \frac{a^2+b^2+2ab}{4} \Leftrightarrow 4ab < a^2 + b^2 + 2ab \Leftrightarrow 2ab < (a-b)^2 + 2ab \Leftrightarrow 0 < (a-b)^2$

$\frac{a+b}{2} < b \Leftrightarrow a - b < 0$ q.e.d.

b) Vollständige Induktion.

Induktionsanfang: $n = 0\colon a < b \Rightarrow a_0 < b_0$

Induktionsannahme: Die Behauptung gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

Induktionsschritt: $n \Rightarrow n + 1$

$a_{n+1} < b_{n+1} \Leftrightarrow \sqrt{a_n b_n} < \frac{a_n+b_n}{2} \Leftrightarrow 4a_n b_n < a_n^2 + b_n^2 + 2a_n b_n \Leftrightarrow 2a_n b_n < (a_n - b_n)^2 + 2a_n b_n \Leftrightarrow 0 < (a_n - b_n)^2$q.e.d.

c) z.z.: $I_{n+1} \subseteq I_n \Leftrightarrow a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$, $n \in \mathbb{N}_0$

$a_n < b_n, n \in \mathbb{N}_0$ wurde in b) gezeigt

Aus a) folgt $a_n < G(a,b) = a_{n+1} < A(a,b) = b_{n+1} < b_n$ q.e.d.

z.z.: $\forall \varepsilon > 0\, \exists n \in \mathbb{N}$ mit $|\mathrm{I}_{n+1}| < \varepsilon$

$|I_{n+1}| = b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} - \sqrt{a_n b_n} = \frac{a_n+b_n-2\sqrt{a_n b_n}}{2} = \frac{(\sqrt{b_n}-\sqrt{a_n})^2}{2} < \frac{1}{2}(b_n - a_n)$

Die Abschätzung ist erlaubt, weil$a_n - 2\sqrt{a_n b_n} = a_n\underbrace{(1 - 2\sqrt{\frac{b_n}{a_n}})}_{<1-2=-1} < -a_n$

Durch mehrfaches Anwenden bekommt man:

$b_{n+1} - a_{n+1} < \frac{1}{2^{n+1}}(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2$

Also $b_n - a_n < \frac{1}{2^n}(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2$

Es gilt $\frac{1}{2^n} \in]0,1]$ und $(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2 > 0$. Nach dem Vollständigkeitsprinzip von $\mathbb{R}$ kann man also immer ein $n \in \mathbb{N}$ finden, für das gilt: $\frac{1}{2^n}(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2 < \varepsilon$q.e.d.

2.3 Injektivität und Surjektivität bei der Komposition von Abbildungen.

Es seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Abbildungen. Untersuchen Sie, welche der nachfolgenden Implikationen zutreffen und welche nicht.

a) $g \circ f$ injektiv $\Rightarrow$ f injektiv

b) g injektiv $\Rightarrow$ $g \circ f$ injektiv

Lösung:

a) Beweis durch Kontraposition, d.h. man zeigt " f nicht injektiv $\Rightarrow$ $g \circ f$ nicht injektiv". Sei also f nicht injektiv. Dann gibt es Elemente $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ aber $f(x_1) = f(x_2)$. Es folgt $(g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2)$ also ist $g \circ f$ nicht injektiv.

b) Gegenbeispiel: Setze $g\colon = id_N$ und $f\colon = N \mapsto N, n \mapsto 1$, dann ist $g \circ f = f$ nicht injektiv.

2.4 Injektivität und Surjektivität

Gegeben sei das folgende kommutierende Diagramm (siehe Bild 1), d. h. für Abbildungen $f\colon A \to B$, $g\colon X \to Y$, $\alpha\colon A \to X$ und $\beta\colon B \to Y$ gelte $g \circ \alpha = \beta \circ f$. Ferner werde vorausgesetzt, dass α, β bijektiv sind. Zeigen Sie: g ist genau dann injektiv, wenn f injektiv ist.

Hinweis: Benutzen Sie folgenden Satz (ohne Beweis): Seien $\varphi\colon K \to L$ und $\psi\colon L \to M$ Abbildungen, es gilt:

a) Sind beide Abbildungen injektiv, so ist auch $\psi \circ \varphi$ injektiv.

b) Sind beide Abbildungen surjektiv, so ist auch $\psi \circ \varphi$ surjektiv.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\
X \arrow[r, "g"] & Y
\end{tikzcd}
$$

Abbildung 1: Aufgabe 4

Lösung:

Behauptung: f injektiv $\Rightarrow$ g injektiv.

Beweis: Es gilt $g \circ \alpha = \beta \circ f$. Da α bijektiv ist, existiert die Umkehrabbildung $\alpha^{-1}\colon X \to A$. Schaltet man dies auf beiden Seiten davor, folgt $g = \beta \circ f \circ \alpha^{-1}$. Und da hier die drei Abbildungen auf der rechten Seite nach Voraussetzung alle injektiv sind, folgt mit dem Hilfssatz sofort, dass auch g injektiv ist.

2.5 Abzählbarkeit der rationalen Zahlen

Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}$ abzählbar/überabzählbar ist.

Lösung:

$\mathbb{Q}$ liegt zwar dicht in $\mathbb{N}$, die vermeintliche Folgerung, dass $\mathbb{Q}$ daher wie $\mathbb{R}$ überabzählbar ist, ist jedoch falsch. Denn $\mathbb{Q}$ ist gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ und damit abzählbar. Dies lässt sich unter anderem mit Cantors erstem Diagonalargument zeigen. Dazu nutzt man aus, dass sich $\mathbb{Q}$ aus der Verknüpfung zweier ganzer Zahlen erzeugen lässt.

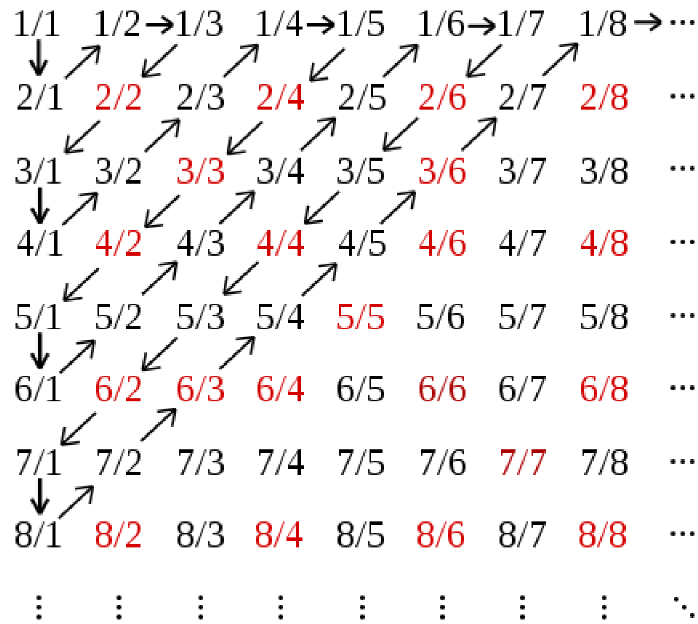

Abbildung 2: Cantors erstes Diagonalargument.

Zunächst wird $\mathbb{Q}^+$ in einem $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ System aufgetragen und wie in Abbildung 2 dargestellt durchlaufen und mit $\mathbb{N}$ nummeriert. Brüche, die sich kürzen lassen, werden übersprungen. So lässt sich also $\mathbb{Q}^+$ abzählen. Um das Verfahren auf ganz $\mathbb{Q}$ auszuweiten, wechselt man positive und negative Elemente ab und stellt die Null der Abzählung als erstes Element voran.

Die bijektive Abbildung folgt demnach folgendem Schema:

$$1 \mapsto 0, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto -1, 4 \mapsto 2, 5 \mapsto -2, 6 \mapsto \frac{1}{2}, 7 \mapsto -\frac{1}{2}, 8 \mapsto \frac{1}{3}, 9 \mapsto -\frac{1}{3}, 10 \mapsto 3, 11 \mapsto -3, 12 \mapsto 4, 13 \mapsto -4, 14 \mapsto \frac{3}{2}, \ldots \tag{13}$$

3 Aufgaben zu komplexen Zahlen

3.1 Nullstellen

a) Prüfen Sie, für welche $\gamma \in \mathbb{C}$ der Bruch B gekürzt werden kann:

$$B(x) = \frac{2x^4 + x^3 + 22x^2 + 9x + 36}{x^2 + \gamma}$$

Lösung:
Man unternimmt Polynomdivision:

$$\begin{array}{rcl}
(2x^4 + x^3 + 22x^2 + 9x + 36) : (x^2 + \gamma) & = & 2x^2 + x + 22 - 2\gamma + \left[\left((9-\gamma)x + 36 - 22\gamma + 2\gamma^2\right) : (x^2 + \gamma)\right] \\
2x^4 + 2\gamma x^2 & & \\
x^3 + (22 - 2\gamma)x^2 + 9x + 36 & & \\
x^3 + \gamma x & & \\
(22 - 2\gamma)x^2 + (9 - \gamma)x + 36 & & \\
(22 - 2\gamma)x^2 + 22\gamma - 2\gamma^2 & & \\
(9 - \gamma)x + 36 - 22\gamma + 2\gamma^2 & &
\end{array}$$

Der Restterm in eckigen Klammern muss gleich 0 sein, damit die Division aufgeht. Der Vorfaktor $(9 - \gamma)$ vor dem x legt nahe, dass dazu $\gamma = 9$ sein muss. Setzt man das ein, sieht man, dass auch $36 - 22\gamma + 2\gamma^2 = 36 - 198 + 162 = 0$ sein muss. Für alle anderen γ wird der Restterm nicht 0, 9 ist also die einzige Lösung.

b) Finden Sie die Nullstellen von $2x^4 + x^3 + 22x^2 + 9x + 36$.

Lösung:

Das Polynom lässt sich darstellen als $\left(2x^2+x+4\right)*\left(x^2+9\right)$, die Nullstellen von $2x^2+x+4$ sind

$$x_{1/2} = \frac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{1-32}) = +\frac{1}{4} \pm i\frac{\sqrt{31}}{4}$$

Die Nullstellen von (x^2+9) sind $x_{3/4} = \pm 3i$

3.2 Rechenübungen

Wandeln Sie in karthesische Darstellung um:

a) $\frac{3+5i}{3-7i}$
Lösung:
$\frac{3+5i}{3-7i} = \frac{(3+5i)(3+7i)}{9+49} = \frac{9-35+i(15+21)}{58} = -\frac{13}{29} + i\frac{18}{29}$

b) $4exp(i\frac{\pi}{3})$
Lösung:
$4exp(i\frac{\pi}{6}) = 4\left(cos(\frac{\pi}{6}) + isin(\frac{\pi}{6})\right) = 4(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = 2\sqrt{3} + 2i$

c)π^i
Lösung:
$\pi^i = exp(i*ln(\pi)) = cos(ln(\pi)) + isin(ln(\pi))\,(\approx 0,4132 + 0,9106i)$

Wandeln Sie in Polardarstellung um:

d) $4+8i$
Lösung:
$4+8i = 4\sqrt{5}exp\left(iarctan(2)\right)$

e) i^e
Lösung:
$i^e = exp(i\frac{\pi}{2})^e = exp(i*e*\frac{\pi}{2})$

f) $\sqrt{3}-3i$
Lösung:
$|\sqrt{3}-3i| = \sqrt{3+9} = 2\sqrt{3}$
$arg(\sqrt{3}-3i) = arctan(\frac{-3}{\sqrt{3}}) + 2\pi = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5}{3}\pi$
$\Longrightarrow \sqrt{3}-3i = 2\sqrt{3}exp(i\frac{5}{3}\pi)$

g) Berechnen Sie: $\sqrt[4]{16i}$
Lösung:
$\sqrt[4]{16i} = \sqrt[4]{16exp(i\frac{\pi}{2})} = \sqrt[4]{16}exp(i\frac{\pi}{2}*\frac{1}{4}) = 2exp(i\frac{\pi}{8})$

h) Berechnen Sie: $(\sqrt{3}+i)^{12}$
Lösung:
$(\sqrt{3}+i)^{12} = (2exp(i\frac{\pi}{6}))^{12} = 2^{12}exp(i2\pi) = 4096$

3.3 Quadratische Gleichung

Lösen Sie die Gleichung

$$z^2 = 3+4i \tag{14}$$

Lösung:
Variante a: Aufspalten in Real- und Imaginärteil:
Wir nehmen die Kompnentendarstellung von z^2: $z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$
Damit lässt sich die komplexe Gleichung in zwei reelle Gleichungen zerlegen:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 3 \\ 2xy &= 4 \end{aligned}$$

Aus der 2. Gleichung sieht man: $y = \frac{2}{x}$, also wird die erste zu

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{4}{x^2} &= 3 && (15)\\ x^4 - 3x^2 - 4 &= 0 && (16)\\ x^2_{1/2} = \tfrac{1}{2} & (3 \pm \sqrt{9+16}) = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases} && (17) \end{aligned}$$

Weil x reell sein muss, scheidet Lösung 2 aus, deshalb gilt: $x^2 = 4$, $x = \pm 2$. Daraus folgt für y: $y = \pm 1$ und schließlich für z:

$$z_{1/2} = \pm(2+i) \tag{18}$$

Variante b: Polardarstellung:
Wir formen z^2 um zu $z^2 = \sqrt{3^2+4^2} exp\left(iarctan(\frac{4}{3})\right) = 5exp\left(iarctan(\frac{4}{3})\right)$
Das Ergebnis ist somit: $z = \pm\sqrt{5}exp\left(i\frac{1}{2}arctan(\frac{4}{3})\right)$
Mit Hilfe eines (eher unbekannten) Additionstheorems kann man auch den Polarwinkel berechnen: $\frac{4}{3} = tan(2\phi) = \frac{2tan\phi}{1-tan^2(\phi)}$. Das liefert die quadratische Gleichung

$$\begin{aligned} 1 - tan^2(\phi) &= \frac{3}{2}tan(\phi) \; bzw. \; tan^2(\phi) + \frac{3}{2}tan(\phi) - 1 = 0\\ tan(\phi) &= \tfrac{1}{2} \quad (-\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}+4}) = \frac{1}{4}(-3 \pm 5) = \begin{cases} (-2) \\ \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Wir wählen die Lösung $\frac{1}{2}$, weil wir wissen, dass das Ergebnis im 1. (bzw. 3) Quadranten liegen soll (wenn man den Punkt z^2 in der komplexen Ebene einzeichnet und den Winkel halbiert, landet man weiterhin im 1. Quadranten, die negative Lösung ist natürlich auch erlaubt).Damit erhält man:
$x = 2y$ bzw. $4y^2 + y^2 = 5$, also ist $y = \pm 1$ und $x = \pm 2$.
Die Lösung lautet schließlich: $z = \pm(2+i)$

3.4 n-te Wurzel

a) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$z^n = 1 \tag{19}$$

genau n Lösungen hat und geben Sie diese an.

Lösung:
Man vermutet, dass die Gleichung die Lösungen $\rho_k = exp(i\frac{2k}{n}\pi)$ besitzt. Setzt man eine solche Lösung ein, so erhält man $\rho_k^n = exp(i\frac{2k*n}{n}\pi) = exp(i2k\pi) = 1$.

b) Man nennt die Lösungen der Gleichung (19) n-te Einheitswurzeln. Zeigen Sie, dass für eine n-te Einheitswurzel ρ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \rho^k = \begin{cases} n, & \rho = 1 \\ 0, & sonst \end{cases} \tag{20}$$

Lösung:
Für $\rho = 1$ ist auch $\rho^k = 1$ immer erfüllt. Man summiert also die 1 n-mal auf und erhält n als Ergebnis.
Für den Fall $\rho \neq 1$ verwendet man die geometrische Summenformel:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \rho^k = \frac{1-\rho^{n-1+1}}{1-\rho} = \frac{1-\rho^n}{1-\rho}$$

An diesem Bruch kann man sehen, dass der Zähler zu 0 wird, der Nenner jedoch nicht, also wird das Ergebnis 0.