Ferienkurs Lineare Algebra

Wintersemester 2009/2010

Lösungen **Eigenwerte und Diagonalsierbarkeit** Blatt 5

---

1 Diagonalisierbarkeit

1. Zeigen sie, dass für eine diagonalisierbare Matrix A folgendes gilt:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

wobei $\lambda_i,\ \forall i = 1, \cdots, n$ die Eigenwerte von A sind.

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det(D) = \det(U^{-1}AU) = \det(U^{-1})\det(A)\det U \det(A)\det(U^{-1}U) = \det(A)$$

---

2. Zeigen sie, dass für eine diagonalisierbare Matrix A folgendes gilt:

$$\mathrm{Spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

wobei $\lambda_i,\ \forall i = 1, \cdots, n$ die Eigenwerte von A sind.

[Hinweis: Benutzen sie die Tatsache, dass man die Matrizen innerhalb der Spur zyklisch vertauschen darf.]

Wegen der Diagonalisierbarkeit gilt $\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = U^{-1}AU$ für eine Matrix A, und daher

$$\mathrm{Spur}(A) = \mathrm{Spur}(U^{-1}AU) = \mathrm{Spur}(\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

---

3. Zeigen Sie, dass eine Ähnlichkeitstransformation $U^{-1}AU = A'$ für eine untiäre oder ortjogonale Matrix U, das Spektrum von A nicht ändert.

Wie schon in den Beweisen oben, nutz man einfach das Multiplikationsgesetz der Determinante aus.

$$\det(A' - \lambda) = \det(U^{-1}AU - \lambda) = \det(A - \lambda)\det(U^{-1})\det(U) = \det(A - \lambda)$$

Daher stimmen die charakteristischen Polynome überein, und damit auch die Eigenwerte.

---

4. Sei N eine nilpotente Matrix, d.h. $\exists m \in \mathbb{N} : N^m = 0$. Zeigen Sie, dass N nur den Eigenwert 0 besitzt.

Sei x ein Eigenvektor von N, dann gilt nach Definition $Nx = \lambda x$. Durch m-maliges anwenden von N auf diese Gleichung ergibt $N^m x = \lambda^m x = 0$. Daraus folgt $\lambda = 0$, da $x \neq 0$ als Eigenvektor.

---

5. Zeigen sie, dass eine hermitesche (selbstadjungierte) Matrix nur reelle Eigenwerte hat .

[Hinweis: Machen Sie sich zunächst einmal klar, dass $x^\dagger x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ gilt]

Die Richtung $\Leftarrow$ ist völlig klar. Die Umkehrung sieht man an $x^\dagger x = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$ für den Standardraum $\mathbb{C}^n$. Da alle Summanden positiv sind, würde man bei der Annahme, dass $x^\dagger x = 0$ und $x \neq 0$ zu einem Widerspruch kommen.

Die Behauptung lässt sich nun schnell zweigen:

$$Ax = \lambda x \Rightarrow \lambda^* x^\dagger = x^\dagger A^\dagger = x^\dagger A \Rightarrow x^\dagger Ax = \lambda x^\dagger x = \lambda^* x^\dagger x$$

Da aber $x \neq 0$, immerhin ein Eigenvektor, somit auch $x^\dagger x \neq 0$, folgt $\lambda = \lambda^*$.

---

6. Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Begründen Sie ihre Antwort kurz!

   a) Eine diagonalisierbare Matrix mit Eigenwert 0 ist invertierbar.

   Aus $\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ folgt $\det(A) = 0$. Daher ist die Matrix nicht invertierbar.

   ---

   b) Wenn $Ax = \lambda x$ und $Bx = \mu x$ gilt, dann ist $\mu\lambda$ ein Eigenwert von AB.

   Wahr, wegen $ABx = A(\mu x) = \mu\lambda x$.

   ---

   c) Die Matrix

   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$$

   hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 9$.

   Falsch, die Matrix hat Dreiecksform und man kann daher die Eigenwerte $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ einfach ablesen.

   ---

   d) Ist 1 ein Eigenwert von A^2, dann ist 1 auch ein Eigenwert von A.

   Falsch, ein Gegenbeispiel ist durch

   $$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   gegeben. Denn A^2 hat den Eigenwert 1, aber A nur den Eigenwert -1.

   ---

e) Die Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

sind $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$.

Falsch, für eine nicht-quadratische Matrix ist der Formalismus um die Eigenwerte und Eigenvektoren nicht definiert. Man beachte das die Gleichung $F(x) = \lambda x$ nur für Endomorphismen F definiert ist.

---

f) Für einen n-dimensionalen Vektorraum V und einem Endomorphismus $F : V \to V$ gilt

$$n - \text{Rang}(F) \geqq \dim(E_0(F))$$

Wegen $E_0(F) = \ker(F)$ und $n = \dim(V)$ ist dies eine Folge des Dimensionssatzes für lineare Abbildungen

$$\dim(V) = \text{Rang}(F) + \dim(\ker(F))$$

---

g) Seien A, B diagonalisierbar, und λ ein Eigenwert zu AB, dann ist λ auch ein Eigenwert zu BA.

Wahr, denn es gilt $BA(Bx) = B(ABx) = B(\lambda x) = \lambda Bx$ und $Bx \neq 0$. Daher ist Bx ein Eigenvektor von BA zum Eigenwert λ.

---

2 Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen

1. Berechnen Sie die Eigenwerte folgender Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha - 2 & 2 - \alpha & 0 \\ 2\alpha - 3 & 3 - 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$

Für A ergibt sich folgende algebraische Gleichung:

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6$$

Hieraus errechnet man die Eigenwerte $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 2$

Für B ergibt sich folgende algebraische Gleichung:

$$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - (-\alpha + 1)) = 0$$

Und hieraus ergeben sich die Eigenwerte $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -\alpha + 1$.

---

2. Bestimmen Sie die Eigenwerte Matrizen und überprüfen sie, ob die Matrizen diagonalisierbar sind. Berechnen Sie gegebenenfalls die Eigenvektoren. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe der aus der Vorlesung bekannten Gleichung $\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte von A ergeben sich aus:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E_2) \Rightarrow & (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = 0 \\ \Rightarrow & \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \\ \Rightarrow & \lambda = 4 \text{ oder } \lambda = -1 \end{aligned}$$

Mit

$$\det(A) = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = -4 = 4 \cdot (-1)$$

überprüft man die erfragte Gleichung.

Die Eigenvektoren ergeben sich aus den bekannten LGS's:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow & \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow & \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von B ergeben sich aus

$$\det(B - \lambda E_3) = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^3 - (1-\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \lambda(1-\lambda)(2-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ oder } \lambda = 1 \text{ oder } \lambda = 2$$

Da alle Eigenwerte unterschiedlich sind, ist die Abbildung diagonalisierbar.

Die gefragte Gleichung überprüft man mittels

$$\det(A) = 0 = 0 \cdot 1 \cdot 2$$

Die Eigenvektoren ergeben sich durch

$$\begin{aligned} \lambda = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \lambda = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \lambda = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von C ergeben sich durch

$$\begin{aligned} \det(C - \lambda E_3) = 0 \Rightarrow & \lambda^3 - 2\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \\ \Rightarrow & \lambda = 3 \text{ oder } \lambda = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} \end{aligned}$$

Die erste Nullstelle kann man erraten, die restlichen erhält man durch Polynomdivsion.

Die Gleichung verifiziert man durch

$$\det(C) = -3 = (-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}})(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}})3$$

Da alle Eigenwerte unterschiedlich sind ist, C auch diagonalisierbar.

Die Eigenvektoren ergeben sich aus

$$\lambda = 3 \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}} & 0 & -3 \\ 1 & \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}} & 4 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}\right) \\ -\frac{5}{4} + \sqrt{\frac{5}{4}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = i \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} & 0 & -3 \\ 1 & \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} & 4 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -3\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}}\right) \\ -\frac{5}{4} - \sqrt{\frac{5}{4}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

---

3. Überprüfen Sie die folgenden komplexen Matrizen daraus, ob sie diagonalisierbar sind. Geben sie dazu die Eigenwerte, die Eigenvektoren und jeweils die geometrische und algebraische Vielfachheit an.

$$A = \begin{pmatrix} 2i & i-1 & i \\ -i & 1 & -i \\ -2i & 1-i & -i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Für A ergibt sich das charakteristische Polynom als

$$\begin{aligned} \kappa(\lambda) = \det(A - \lambda E_3) &= (2i - \lambda)(1-\lambda)(-i-\lambda) - 3(1-i) - [2(1-\lambda) + (1+i)(-i-\lambda) + (2i-\lambda)(-i-1)] \\ &= (2i-\lambda)(1-\lambda)(-i-\lambda) - 2 + 2\lambda \\ &= (1-\lambda)[\lambda^2 - i\lambda] \\ &= \lambda(1-\lambda)(\lambda - i) \end{aligned}$$

Daher sind ergeben sich die Eigenwerte $\{1, 0, i\}$ und hieraus wiederum die Eigenvektoren:

$$\lambda = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2i-1 & i-1 & i \\ -i & 0 & -i \\ -2i & 1-i & -i-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2i & i-1 & i \\ -i & 1 & -i \\ -2i & 1-i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{a} = \begin{pmatrix} i \\ -i \\ -(1+i) \end{pmatrix}$$

$$\lambda = i \Rightarrow \begin{pmatrix} i & i-1 & i \\ -i & 1-i & -i \\ -2i & 1-i & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die geometrische und algebraische Vielfachheit ist jeweils 1. Man sieht das jeweils algebraische und geometrische Vielfachheit übereinstimmen. Daher ist A diagonalisierbar.

Die Eigenwerte von B ergeben sich durch

$$\begin{aligned}\det(B-\lambda E_2)=0 &\Rightarrow (-1-\lambda)(-1-\lambda)+1=0\\ &\Rightarrow \lambda^2+2\lambda+2=0\\ &\Rightarrow \lambda_\pm=-1\pm i\end{aligned}$$

Da die Eigenwerte unterschiedlich sind, folgt, dass B diagonalisierbar ist.

Die Eigenvektoren ergeben sich aus

$$\lambda=-1\pm i \Rightarrow \begin{pmatrix}\pm i & -1\\ 1 & \pm i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{\pm,1}\\ a_{\pm,2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow \mathbf{a}=\begin{pmatrix}1\\ \pm i\end{pmatrix}$$

Wiederum sind die Vielfachheiten jeweils 1 und damit B diagonalisierbar.

---

3 Vermischtes

a) Es sei der Vektorraum $\{e_1=t^2, e_2=t, e_3=1\}$ und die Abbildung $b: V\times V\to\mathbb{R}, b(f,g):=\int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$ gegeben.

i. Zeigen Sie, dass b eine Bilinearform ist.

Aus der Linearität des Integrals und der Definition der Verknüpfungen auf Abb($\mathbb{R}$) folgt sofort

$$\begin{aligned}b(\lambda f,g)=b(f,\lambda g)&=\lambda b(f,g)\\ b(f+h,g)&=b(f,g)+b(h,g)\\ b(f,g+h)&=b(f,g)+b(f,h)\end{aligned}$$

---

ii. Bestimmen sie die zugeordnete Matrix B in der angegebenen Basis und schließen Sie aus deren Form, dass sie diagonalisierbar ist.

[Hinweis: Betrachten sie $b(e_i,e_j),\ i,j=1,2,3$]

$$B=\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{2}{3} & 0\\ \frac{2}{3} & 0 & 2\end{pmatrix}$$

Als symmetrische Matrix ist B diagonalisierbar.

---

iii. Berechnen Sie $b(\phi,\psi)$ für $\phi=2t^2+5$ und $\psi=-t^2+3t-2$ auf zwei verschiedene Weisen.

Einmal durch reines Einsetzten und ausnutzen der Linearität, sowie Ausrechnen der verbleibenden Integrale:

$$\begin{aligned} b(\phi,\psi) &= b(2t^2,-t^2)+b(5,-t^2)+b(2t^2,3t)+b(5,3t)+b(2t^2,-2)+b(5,-2) \\ &= -2b(t^2,{}^2\,)-5b(1,t^2)-4b(t^2,1)-10b(1,1) &= -\frac{134}{3} \end{aligned}$$

Und einmal durch die Darstellung der Funktionen als Vektoren und Verwendung der Matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{26}{15} & 2 & -\frac{14}{3} \end{pmatrix} = -\frac{134}{3}$$

Oh, Wunder! Die Ergebnisse stimmen überein.

---

iv. Bestimmen sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von B.

Die Eigenwerte ergeben sich aus

$$\det(B-\lambda E_3)=0 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3} \text{ oder } \lambda = \frac{6}{5} \pm \frac{\sqrt{244}}{15}$$

$$\lambda = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{4}{15} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \frac{4}{5} \pm \frac{2\sqrt{61}}{15} \Rightarrow \begin{pmatrix} -(\frac{12\pm2\sqrt{61}}{15}) & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & -(\frac{24\pm2\sqrt{61}}{15}) & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & -(\frac{-12\pm2\sqrt{61}}{15}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \pm \frac{2\sqrt{61}}{15} \end{pmatrix}$$
