Ferienkurs Lineare Algebra

Wintersemester 2009/20010

Lösungen **Eigenwerte und Diagonalsierbarkeit** Blatt 5

1 Diagonalisierbarkeit

1. Zeigen sie, dass für eine diagonalisierbare Matrix A folgendes gilt:
$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$
wobei $\lambda_i,\ \forall i = 1, \cdots, n$ die Eigenwerte von A sind.
2. Zeigen sie, dass für eine diagonalisierbare Matrix A folgendes gilt:
$$\mathrm{Spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$
wobei $\lambda_i,\ \forall i = 1, \cdots, n$ die Eigenwerte von A sind.
[Hinweis: Benutzen sie die Tatsache, dass man die Matrizen innerhalb der Spur zyklisch vertauschen darf.]
3. Zeigen Sie, dass eine Ähnlichkeitstransformation $U^{-1}AU = A'$ für eine untiäre oder ortjogonale Matrix U, das Spektrum von A nicht ändert.
4. Sei N eine nilpotente Matrix, d.h. $\exists m \in \mathbb{N} : N^m = 0$. Zeigen Sie, dass N nur den Eigenwert 0 besitzt.
5. Zeigen sie, dass eine hermitesche (selbstadjungierte) Matrix nur reelle Eigenwerte hat .
[Hinweis: Machen Sie sich zunächst einmal klar, dass $x^\dagger x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ gilt]
6. Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Begründen Sie ihre Antwort kurz!
   a) Eine diagonalisierbare Matrix mit Eigenwert 0 ist invertierbar.
   b) Wenn $Ax = \lambda x$ und $Bx = \mu x$ gilt, dann ist $\mu\lambda$ ein Eigenwert von AB.
   c) Die Matrix
   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$$
   hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 9$.
   d) Ist 1 ein Eigenwert von A^2, dann ist 1 auch ein Eigenwert von A.
   e) Die Eigenwerte der Matrix
   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
   sind $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$.
   f) Für einen n-dimensionalen Vektorraum V und einem Endomorphismus $F : V \to V$ gilt
   $$n - \mathrm{Rang}(F) \geqq \dim(E_0(F))$$
   g) Seien A, B diagonalisierbar, und λ ein Eigenvektor zu AB, dann ist λ auch ein Eigenvektor zu BA .

2 Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen

1. Berechnen Sie die Eigenwerte folgender Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha - 2 & 2 - \alpha & 0 \\ 2\alpha - 3 & 3 - 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   wobei $\alpha \in \mathbb{R}$

2. Bestimmen Sie die Eigenwerte Matrizen und überprüfen sie, ob die Matrizen diagonalisierbar sind. Berechnen Sie gegebenenfalls die Eigenvektoren. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe der aus der Vorlesung bekannten Gleichung $\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Überprüfen Sie die folgenden komplexen Matrizen daraus, ob sie diagonalisierbar sind. Geben sie dazu die Eigenwerte, die Eigenvektoren und jeweils die geometrische und algebraische Vielfachheit an.

$$A = \begin{pmatrix} 2i & i - 1 & i \\ -i & 1 & -i \\ -2i & 1 - i & -i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Es sei der Vektorraum $\{e_1 = t^2, e_2 = t, e_3 = 1\}$ und die Abbildung $b : V \times V \to \mathbb{R}, b(f,g) := \int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$ gegeben.

   a) Zeigen Sie, dass b eine Bilinearform ist.

   b) Bestimmen sie die zugeordnete Matrix B in der angegebenen Basis und schließen Sie aus deren Form, dass sie diagonalisierbar ist.

      [Hinweis: Betrachten sie $b(e_i, e_j), \; i, j = 1, 2, 3$]

   c) Berechnen Sie $b(\phi, \psi)$ für $\phi = 2t^2 + 5$ und $\psi = -t^2 + 3t - 2$ auf zwei verschiedene Weisen.

   d) Bestimmen sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von B.