CHRISTOPH NIEHOFF


MUSTERLÖSUNG DONNERSTAG



**Aufgabe 1.**

Meistens gibt es mehrere Möglichkeiten, Determinanten zu berechnen. Wir werden hier die meisten einmal vorführen.

a) Diese Matrix werden wir mit dem Gaußverfahren auf Dreiecksgestalt bringen. Wir müssen uns dabei allerdings aufpassen, ob wir Zeilenumformungen machen, die Vorfaktoren verlangen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 6 \\ 2 & 7 & 9 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (II) \leftarrow (II) - 2(I) \\ (III) \leftarrow (III) - 2(I) \\ (IV) \leftarrow (IV) - (I) \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (III) \leftarrow (III) - 3(II)$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix ist nun in Dreicksgestalt und wir müssen keine anderen Faktoren beachten. Die Determinante kann also als Produkt der Diagonalelemente bestimmt werden.

$$\det(A_1) = 1 \cdot 1 \cdot 18 \cdot 1 = 18$$

b) Diese Matrix ist schon in Dreiecksgestalt. Die Determinante kann also als Produkt der Diagonalelemente (Nebendiagonale!) bestimmt werden. Wir müssen aber auf die verschiedenen Vorzeichen, die durch die Laplace'sche Entwicklungsformel entstehen, achten.

$$\det(A_2) = (-2) \cdot (+2) \cdot (-2) \cdot (+2) = (-1)^2 \cdot 2^4 = 16.$$

c) Durch scharfes Hinschauen erkennt man, dass die dritte Spalte die Summe der ersten beiden Spalten ist. Deshalb sind die Spalten linear abhängig.

$$\det(A_3) = 0$$

d) Bei dieser Matrix kann man geschickt die Laplace-Entwicklung verwenden.

$$\begin{aligned}\det(A_4) &= (+1)\cdot 1\cdot \det\begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{\sqrt{2}} & \cancel{e^{102343}} \\ \cancel{0} & 0 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & 6 & 7 & 15 \\ \cancel{0} & 0 & -6 & -\pi \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 15 \\ 0 & -6 & -\pi \end{pmatrix} \\ &= (-1)\cdot 6\cdot \det\begin{pmatrix} \cancel{0} & 1 & 0 \\ \cancel{6} & \cancel{7} & \cancel{15} \\ \cancel{0} & -6 & -\pi \end{pmatrix} \\ &= -6\cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & -\pi \end{pmatrix} = 6\pi\end{aligned}$$

e) Zuerst bemerken wir:

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)\,.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\det\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 [1\cdot 1\cdot 0 + 2\cdot 4\cdot 3 + (-1)\cdot 0\cdot 1 - (-1)\cdot 1\cdot 3 - 2\cdot 0\cdot 0 - 1\cdot 4\cdot 1] \\ &= \frac{1}{8}[24+3-4] = \frac{23}{8}\end{aligned}$$

Hier wurde die Regel von Sarrus angewendet.

**Aufgabe 2.**

Vier Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4 \in \mathbb{R}^4$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^4$, falls sie linear unabhängig sind. Dieses kann über die Determinante der Matrix $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ geprüft werden. Verschwindet der Determinante, so sind die Vektoren linear abhängig.

a)

$$\begin{aligned}&\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= (+1)\cdot 1\cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + (+1)\cdot 1\cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= 1\cdot 2\cdot(-1) + 0\cdot 5\cdot 0 + 2\cdot 3\cdot 1 - 2\cdot 2\cdot 0 - 0\cdot 3\cdot(-1) - 1\cdot 5\cdot 1 + \\ &\quad + 2\cdot 0\cdot(-1) + 0\cdot 2\cdot 0 + 5\cdot 1\cdot 1 - 5\cdot 0\cdot 0 - 0\cdot 1\cdot(-1) - 2\cdot 2\cdot 1 \\ &= -2+6-5+5-4 = 0\end{aligned}$$

Die Vektoren sind linear abhängig. Sie bilden also keine Basis.

b)

$$
\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\
&= (-1)\cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} + (-1)\cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= -\left[2\cdot 0\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 0 + (-1)\cdot(-2)\cdot 5 - (-1)\cdot 0\cdot 0 - 1\cdot(-2)\cdot 1 - 2\cdot 1\cdot 5 + \right. \\
&\quad \left. +2\cdot(-1)\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot(-2) + (-1)\cdot(-2)\cdot 0 - (-1)\cdot(-1)\cdot(-2) - 1\cdot(-1)\cdot 1 - 2\cdot 1\cdot 0\right] \\
&= -\left(10 + 2 - 10 - 2 - 2 + 2 + 2\right) = -2 \neq 0
\end{aligned}
$$

Die Vektoren sind linear unabhängig. Sie bilden also eine Basis.

Die Determinanten wurden mit der Laplace'schen Entwicklungsformel und der Regel von Sarrus berechnet.

**Aufgabe 3.**

a)

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= 1\cdot 0\cdot 4 + 0\cdot 3\cdot 0 + (-1)\cdot 3\cdot 2 - (-1)\cdot 0\cdot 0 - 0\cdot 3\cdot 4 - 1\cdot 3\cdot 2 \\
&= -6 - 6 = -12
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= (-1)\cdot 2\cdot \det\begin{pmatrix} 1 & \cancel{0} & -1 \\ 3 & \cancel{0} & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{4} \end{pmatrix} \\
&= (-2)\cdot\left[1\cdot 3 - (-1)\cdot 3\right] = -12
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad (II) \leftarrow (II) - 3(I) \\
&= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \mathit{swap}: \quad (II) \leftrightarrow (III) \\
&= -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \\
&= -\left[1\cdot 2\cdot 6\right] = -12
\end{aligned}
$$

**Aufgabe 4.**

a) Diese Abbildung ist nicht multilinear, denn es gilt z.B.

$$\begin{aligned}
f_1(1+1,1,0,0,\dots) &= f_1(2,1,0,0,\dots) \\
&= 2+1+0 \\
&= (1+1+0)+(1+0+0) \\
&\neq (1+1+0)+(1+1+0) \\
&= f_1(1,1,0,0,\dots)+f_1(1,1,0,0,\dots).
\end{aligned}$$

b) Wir müssen die Linearität in einer beliebigen Komponente $x_i$ mit $i \in \{1,\dots,408\}$ zeigen. Aufgrund der Kommutavität der Multiplikation der reellen Zahlen können wir o.B.d.A. $i=1$ wählen. Dann gilt aufgrund des Distributivgesetzes:

$$\begin{aligned}
f_2(\lambda x_1+\mu x_1', x_2,\dots,x_{408}) &= (\lambda x_1+\mu x_1')\cdot\prod_{i=2}^{408} x_i \\
&= \lambda x_1\cdot\prod_{i=2}^{408} x_i+\mu x_1'\cdot\prod_{i=2}^{408} x_i \\
&= \lambda f_2(x_1,x_2,\dots,x_{408})+\mu f_2(x_1',x_2,\dots,x_{408}).
\end{aligned}$$

Diese Abbildung ist also multilinear. Allerdings ist sie offensichtlich nicht alternierend.

c) Die Abbildung ist nicht multilinear, denn es gilt z.B.

$$\begin{aligned}
f_3\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) &= f_3\left(\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2+0\\1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \\
&\neq \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0\\1-0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1+0\\1-0\end{pmatrix} \\
&= f_3\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)+f_3\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$

d) Für diese Abbildung gilt:

$$\begin{aligned}
f_4\left(\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\right) &= \det\begin{pmatrix}a_1+2a_2 & b_1+2b_2\\ -a_1 & -b_1\end{pmatrix} \\
&= \det\left(\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}\right) \\
&= \det\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix} \\
&= 2\det\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

**Alternativ** könnte man auch die Multilinearität der Determinante und ihre Invarianz unter

Transponieren benutzen:

$$
\begin{aligned}
f_4\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right) &= \det\begin{pmatrix} a_1+2a_2 & b_1+2b_2 \\ -a_1 & -b_1 \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} a_1+2a_2 & -a_1 \\ b_1+2b_2 & -b_1 \end{pmatrix} \\
&= \underbrace{\det\begin{pmatrix} a_1 & -a_1 \\ b_1 & -b_1 \end{pmatrix}}_{=0} + 2\det\begin{pmatrix} a_2 & -a_1 \\ b_2 & -b_1 \end{pmatrix} \\
&= -2\det\begin{pmatrix} -a_1 & a_2 \\ -b_1 & b_2 \end{pmatrix} \\
&= 2\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \\
&= 2\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Wir sehen also, dass diese Abbildung nichts anderes als eine skalierte Determinante ist. Somit ist sie eine alternierende Multilinearform.

**Aufgabe 5.**

Wir müssen hier die Gleichheit zweier Mengen zeigen:

$$\mathsf{L} := \left\{\lambda(\vec{v}-\vec{w})+\vec{w} \in \mathbb{R}^2 : \lambda \in \mathbb{R}\right\} \overset{!}{=} \left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : \det\begin{pmatrix} 1 & v_1 & v_2 \\ 1 & w_1 & w_2 \\ 1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} = 0\right\} =: \mathsf{M}.$$

Dazu müssen wie immer zwei Richtungen gezeigt werden.

**"$\subseteq$":** Sei $\vec{x} \in \mathsf{L}$, d.h. es existiert $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass $\vec{x} = \lambda(\vec{v}-\vec{w})+\vec{w}$. Für $\lambda = 0$ folgt sofort $\vec{x} = \vec{w}$ und somit $\vec{x} \in \mathsf{M}$. Sei also im Folgenden $\lambda \neq 0$.
Dann erhalten wir durch elementare Zeilenumformungen:

$$
\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix} 1 & v_1 & v_2 \\ 1 & w_1 & w_2 \\ 1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} 1 & v_1 & v_2 \\ 1 & w_1 & w_2 \\ 1 & \lambda(v_1-w_1)+w_1 & \lambda(v_2-w_2)+w_2 \end{pmatrix} && (I) \leftarrow (I)-(II) \\
&= \det\begin{pmatrix} 0 & v_1-w_1 & v_2-w_2 \\ 1 & w_1 & w_2 \\ 1 & \lambda(v_1-w_1)+w_1 & \lambda(v_2-w_2)+w_2 \end{pmatrix} && (I) \leftarrow \lambda(I) \\
&= \frac{1}{\lambda}\det\begin{pmatrix} 0 & \lambda(v_1-w_1) & \lambda(v_2-w_2) \\ 1 & w_1 & w_2 \\ 1 & \lambda(v_1-w_1)+w_1 & \lambda(v_2-w_2)+w_2 \end{pmatrix} && (I) \leftarrow (I)+(II) \\
&= \frac{1}{\lambda}\det\begin{pmatrix} 1 & \lambda(v_1-w_1)+w_1 & \lambda(v_2-w_2)+w_2 \\ 1 & w_1 & w_2 \\ 1 & \lambda(v_1-w_1)+w_1 & \lambda(v_2-w_2)+w_2 \end{pmatrix} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Damit gilt $\vec{x} \in \mathsf{M}$.

**"⊇":** Sei nun $\vec{x} \in \mathsf{M}$. Dann sind die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

linear abhängig. Der erste Vektor kann also aus den anderen beiden linear kombiniert werden. D.h. es existieren $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}.$$

Aus der ersten Komponentengleichung folgt nun $1 = \lambda + \mu \quad \Leftrightarrow \quad \mu = 1 - \lambda$. Damit ergibt sich für die übrigen Komponenten

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda v_1 + (1-\lambda) w_1 \\ x_2 &= \lambda v_2 + (1-\lambda) w_2 \\ \Rightarrow \quad \vec{x} &= \lambda (\vec{v} - \vec{w}) + \vec{w} \end{aligned}$$

Damit gilt $\vec{x} \in \mathsf{L}$.

**Aufgabe 6.**

Wir müssen die Gruppenaxiome betrachten.

(i) **Abgeschlossenheit**.
Für alle $A, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Die Matrizenmultiplikation ist abgeschlossen.

(ii) **Assoziativität**.
Für alle $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$. Die Matrizenmultiplikation ist assoziativ.

(iii) **Neutrales Element**.
Wir benötigen ein neutrales Element. Dieses ist die *Einheitsmatrix* $\mathbb{1}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$, denn für alle $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt: $A \cdot \mathbb{1}_n = \mathbb{1}_n \cdot A = A$.

(iv) **Inverses Element**.
Das inverse Element bzgl. der Matrizenmultiplikation ist die inverse Matrix. Allerdings existiert sie nur für Matrizen mit Determinante ungleich Null.

Wir sehen, dass uns nur die Existenz eines inversen Elementes eine Einschränkung gibt. Somit können wir die *allgemeine Matrizengruppe* definieren:

$$\mathrm{GL}(n) := \left\{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det(A) \neq 0 \right\}.$$

Wir überprüfen nun die Untergruppenaxiome für $\mathrm{SL}(n)$:

(i) **Teilmengeneigenschaft**.
Es gilt offensichtlich $\mathrm{SL}(n) \subset \mathrm{GL}(n)$, da $1 \neq 0$. Außerdem gilt $\det(\mathbb{1}_n) = 1$, woraus folgt: $\mathbb{1}_n \in \mathrm{SL}(n)$ und darum $\mathrm{SL}(n) \neq \emptyset$.

(ii) **Abgeschlossenheit bzgl. der Gruppenverknüpfung**.
Es seien $A, B \in \mathrm{SL}(n)$. Dann gilt: $\det(A \cdot B) = \det(A) \det(B) = 1 \cdot 1 = 1$. Somit gilt: $A \cdot B \in \mathrm{SL}(n)$.

(iii) **Abgeschlossenheit bzgl. Inversenbildung**.
Es sei $A \in \mathrm{SL}(n)$. Dann gilt: $\det\left(A^{-1}\right) = (\det(A))^{-1} = 1^{-1} = 1$. Somit gilt $A^{-1} \in \mathrm{SL}(n)$.

Wir haben also gezeigt, dass $\mathrm{SL}(n)$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(n)$ ist.

**Aufgabe 7.**

Wir berechnen die Determinante mit der Regel von Sarrus.

$$\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\phi) & r\cos(\theta)\cos(\phi) & -r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ \sin(\theta)\sin(\phi) & r\cos(\theta)\sin(\phi) & r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix} \\
&= \sin(\theta)\cos(\phi)\cdot r\cos(\theta)\sin(\phi)\cdot 0 + r\cos(\theta)\cos(\phi)\cdot r\sin(\theta)\cos(\phi)\cdot\cos(\theta) \\
&\quad + (-r\sin(\theta)\sin(\phi))\cdot\sin(\theta)\sin(\phi)\cdot(-r\sin(\theta)) - (-r\sin(\theta)\sin(\phi))\cdot r\cos(\theta)\sin(\phi)\cdot\cos(\theta) \\
&\quad - r\cos(\theta)\cos(\phi)\cdot\sin(\theta)\sin(\phi)\cdot 0 - \sin(\theta)\cos(\phi)\cdot r\sin(\theta)\cos(\phi)\cdot(-r\sin(\theta)) \\
&= r^2\cos^2(\theta)\sin(\theta)\cos^2(\phi) + r^2\sin^3(\theta)\sin^2(\phi) \\
&\quad r^2\cos^2(\theta)\sin(\theta)\sin^2(\phi) + r^2\sin^3(\theta)\cos^2(\phi) \\
&= r^2\cos^2(\theta)\sin(\theta)\underbrace{\left[\cos^2(\phi)+\sin^2(\phi)\right]}_{=1} + r^2\sin^3(\theta)\underbrace{\left[\cos^2(\phi)+\sin^2(\phi)\right]}_{=1} \\
&= r^2\sin(\theta)\underbrace{\left[\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)\right]}_{=1} \\
&= r^2\sin(\theta)
\end{aligned}$$

**Aufgabe 8.***

Die zu beweisenden Eigenschaften korrespondieren zu den bekannten Eigenschaften das Kreuzproduktes.

(i) Linearität des Kreuzproduktes

(ii) Anti-Kommutativität

(iii) Berechnungsformel: $\vec{a}\times\vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2 - b_1)^{\mathrm{T}}$

(iv) Orthogonalität

In dieser Definition folgen diese Eigenschaften direkt aus den Eigenschaften der Determinante. Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{b}' \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Sei weiterhin $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ beliebig.

(i)

$$\begin{aligned}
\left\langle \vec{x}, \left(\vec{a}\times\left(\vec{b}+\lambda\vec{b}'\right)\right)\right\rangle &= \det\left(\vec{x},\vec{a},\left(\vec{b}+\lambda\vec{b}'\right)\right) \\
&= \det\left(\vec{x},\vec{a},\vec{b}\right) + \lambda\det\left(\vec{x},\vec{a},\vec{b}'\right) \\
&= \left\langle \vec{x}, \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right\rangle + \lambda\left\langle \vec{x}, \left(\vec{a}\times\vec{b}'\right)\right\rangle \\
&= \left\langle \vec{x}, \left(\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) + \lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}'\right)\right)\right\rangle
\end{aligned}$$

Da diese Gleichung für alle $\vec{x}\in\mathbb{R}^3$ gilt, folgt $\vec{a}\times\left(\vec{b}+\lambda\vec{b}'\right) = \left(\vec{a}\times\vec{b}\right) + \lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}'\right)$.
Der Vollständigkeit halber beweisen wir diesen letzten Folgerungsschritt in einem "Nebenbeweis". Seien hierfür $\vec{\mathfrak{a}}, \vec{\mathfrak{b}} \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
&\langle \vec{x}, \vec{\mathfrak{a}}\rangle = \left\langle \vec{x}, \vec{\mathfrak{b}}\right\rangle \qquad \forall\, \vec{x}\in\mathbb{R}^3 \\
\Rightarrow\quad &\left\langle \vec{x}, \left(\vec{\mathfrak{a}} - \vec{\mathfrak{b}}\right)\right\rangle = 0 \qquad \forall\, \vec{x}\in\mathbb{R}^3 \\
\Rightarrow\quad &\vec{\mathfrak{a}} - \vec{\mathfrak{b}} \in \left(\mathbb{R}^3\right)^{\perp} \\
\Rightarrow\quad &\vec{\mathfrak{a}} - \vec{\mathfrak{b}} = \vec{0}
\end{aligned}$$

Diese Eigenschaft beruht also auf der Multilinearität der Determinante.

(ii)

$$
\begin{aligned}
\left\langle \vec{x}, \left(\vec{b} \times \vec{a}\right) \right\rangle &= \det\left(\vec{x}, \vec{b}, \vec{a}\right) \\
&= -\det\left(\vec{x}, \vec{a}, \vec{b}\right) \\
&= -\left\langle \vec{x}, \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \right\rangle \\
&= \left\langle \vec{x}, \left(-\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\right) \right\rangle
\end{aligned}
$$

Mit den gleichen Argumenten wie oben folgt nun $\vec{b} \times \vec{a} = -\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$.
Diese Eigenschaft beruht also darauf, dass die Determinante alternierend ist.

(iii) Die $k$-te Komponente erhält man durch Projektion auf den $k$-ten Einheitsvektor $\vec{e}_k \in \mathbb{R}^3$.

$$
\begin{aligned}
\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_k &= \left\langle \vec{e}_k, \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \right\rangle \\
&= \det\left(\vec{e}_k, \vec{a}, \vec{b}\right) \\
&= (-1)^{k+1} \det\left(\mathfrak{A}_k\right)
\end{aligned}
$$

Im letzten Schritt wurde die Laplace'sche Entwicklungsformel verwendet. Machen wir uns dieses am Fall $k = 1$ deutlich:

$$
\begin{aligned}
\det\left(\vec{e}_1, \vec{a}, \vec{b}\right) &= \det\begin{pmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & a_3 & b_3 \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{a_1} & \cancel{b_1} \\ \cancel{0} & a_2 & b_2 \\ \cancel{0} & a_3 & b_3 \end{pmatrix} \\
&= \det\left(\underbrace{\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}}_{=:\mathfrak{A}_1}\right)
\end{aligned}
$$

Die anderen beiden Fälle $k = 2$ und $k = 3$ folgen analog.
Die Berechnungsformel für das Kreuzprodukt folgt hier also aus dem Laplace'schen Entwicklungssatz.

(iv)

$$
\begin{aligned}
\left\langle \vec{a}, \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \right\rangle &= \det\left(\vec{a}, \vec{a}, \vec{b}\right) = 0 \\
\left\langle \vec{b}, \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \right\rangle &= \det\left(\vec{b}, \vec{a}, \vec{b}\right) = 0
\end{aligned}
$$

Diese Eigenschaft folgt wieder aus der Alterniertheit der Determinante.

Die letzte Eigenschaft, dass $\|\vec{a} \times \vec{b}\|_2$ gleich dem Flächeninhalt des aufgespannten Parallelogramms ist, folgt aus einer verallgemeinerten Produktformel und der Tatsache, dass die Determinante eine *Volumenform* ist, d.h. sie entspricht dem Volumen des von den Spaltenvektoren aufgespannten Parallelotops.