Aufgabe 1.

Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 6 \\ 2 & 7 & 9 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \sqrt{2} & e^{102343} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 15 \\ 0 & 0 & -6 & -\pi \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2.

Bilden folgende Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^4$?

a) $$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

b) $$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Diese Aufgabe gab es gestern schon. Lösen Sie sie aber heute auf eine andere Art.

Aufgabe 3.

Berechnen Sie die Determinante folgender Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

a) mit der Regel von Sarrus.

b) mit der Laplace'schen Entwicklungsformel.

c) indem sie die Matrix auf Diagonalgestalt bringen.

Welches Verfahren gefällt Ihnen am besten?

Aufgabe 4.

Welche der folgenden Abbildungen ist multilinear? Welche ist eine alternierende multilineare Abbildung?

a) $f_1 : \mathbb{R}^{407} \to \mathbb{R}, \qquad (x_1, \ldots, x_{407}) \mapsto \sum_{i=1}^{407} x_i$

b) $f_2 : \mathbb{R}^{408} \to \mathbb{R}, \qquad (x_1, \ldots, x_{408}) \mapsto \prod_{i=1}^{408} x_i$

c) $f_3 : \left(\mathbb{R}^2\right)^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} a_1 + b_2 \\ b_1 - a_2 \end{pmatrix}$

d) $f_4 : \left(\mathbb{R}^2\right)^2 \to \mathbb{R}, \qquad \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right) \mapsto \det \begin{pmatrix} a_1 + 2a_2 & b_1 + 2b_2 \\ -a_1 & -b_1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5.

Seien $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ zwei Punkte in der Ebene und sei $L \subset \mathbb{R}^2$ die Gerade durch $\vec{v}$ und $\vec{w}$. Beweisen Sie, dass dann gilt:

$$L = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \det \begin{pmatrix} 1 & v_1 & v_2 \\ 1 & w_1 & w_2 \\ 1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} = 0 \right\}.$$

Aufgabe 6.

Versuchen Sie den reellen, quadratischen $(n \times n)$-Matrizen eine Gruppenstruktur bzgl. der Matrizenmultiplikation zu geben. Geht das mit der gesamten Menge der Matrizen? Überprüfen Sie die Gruppenaxiome und finden Sie ggf. Einschränkungen.
Ist $\mathrm{SL}(n)$, die Gruppe der reellen $(n \times n)$-Matrizen mit Determinante 1, eine Untergruppe dieser Gruppe?

Aufgabe 7.

Berechnen Sie folgende Determinante:

$$\det \left(\begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\phi) & r\cos(\theta)\cos(\phi) & -r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ \sin(\theta)\sin(\phi) & r\cos(\theta)\sin(\phi) & r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix} \right)$$

Aufgabe 8.*

Wir betrachten hier eine mögliche andere Definition des Kreuzproduktes $\times : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.
Es seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Dann definieren wir $\vec{a} \times \vec{b}$ durch folgende Gleichung

$$\det\left(\vec{x}, \vec{a}, \vec{b}\right) = \left\langle \vec{x}, \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \right\rangle \qquad \forall\, \vec{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Dabei bezeichne $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ das Standardskalarprodukt.
Beweisen Sie:

(i) $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \lambda \vec{b}'\right) = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) + \lambda \left(\vec{a} \times \vec{b}'\right) \qquad \forall\, \vec{a}, \vec{b}, \vec{b}' \in \mathbb{R}^3\ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$

(ii) $\vec{b} \times \vec{a} = -\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \qquad \forall\, \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3.$

(iii) Für die k-te Komponente des Kreuzproduktes gilt: $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_k = (-1)^{k+1} \det\left(\mathfrak{A}_k\right)$.
Dabei entsteht $\mathfrak{A}_k \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ durch Streichen der k-ten Zeile in $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) \in \mathbb{R}^{3\times 2}$.

(iv) $\vec{a} \perp \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$ und $\vec{b} \perp \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$.