Aufgabe 1.

Wir wenden einfach nur das Gauß-Jordan-Verfahren an:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (II) \leftarrow a(II) - c(I)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{array}\right) \qquad (I) \leftarrow (ad-bc)(I) - b(II)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} (ad-bc)a & 0 & ad-bc+bc & -ab \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{array}\right) \qquad (I) \leftarrow \frac{1}{a}(I)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} ad-bc & 0 & d & -b \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{array}\right)$$

Wir sehen, dass das Probleme gibt für $ad - bc = 0$. Eine Inverse kann also nur für $ad - bc \neq 0$ existieren. In diesem Fall gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2.

a) Wir wenden hier das Ergebnis auf Aufgabe an und erhalten somit die inverse Matrix:

$$A^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{8}} - 3(-1)}\begin{pmatrix} 8^{-\frac{1}{2}} & 1 \\ -3 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{2}{7}\begin{pmatrix} 8^{-\frac{1}{2}} & 1 \\ -3 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich die Lösung des Gleichungssystemes zu:

$$\begin{aligned} x = A^{-1} \cdot b &= \frac{2}{7}\begin{pmatrix} 8^{-\frac{1}{2}} & 1 \\ -3 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{32} \\ \sqrt{18} \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{7}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{8}}\sqrt{32} + \sqrt{18} \\ -3\sqrt{32} + \sqrt{18}\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{7}\begin{pmatrix} 2 + 3\sqrt{2} \\ -12\sqrt{2} + 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Dies ist eine *Fangfrage*. Die Multiplikation zwischen einer (3×4)-Matrix und einem 3-Spaltenvektor ist nicht definiert. Diese Gleichung stellt also kein wohldefinertes Gleichungssystem dar.

c) Zuerst fällt auf, dass wir 3 Gleichungen mit 4 Unbekannten haben. Wir erwarten also schon von vornherein, dass es keine eindeutige Lösung gibt.

Wir beginnen mit Gaußverfahren:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 4 & 0 \\ -6 & 5 & 7 & 3 & 1 \end{array}\right) \quad (III) \leftarrow (III) - 6(I)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -13 & 1 & 15 & 1 \end{array}\right) \quad (III) \leftarrow 3(III) + 13(II)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 97 & 3 \end{array}\right)$$

Wir sehen, dass wir eine unabhängige Variable einführen müssen, z.B. $x_4 = \lambda$. Damit erhalten wir die Lösung durch Rückwärtseinsetzen.

$$\begin{aligned} (III) &\Rightarrow 10x_3 + 97x_4 = 3 \quad \Rightarrow \quad 10x_3 + 97\lambda = 3 && \Rightarrow \quad x_3 = -0,3 + 9,7\lambda \\ (II) &\Rightarrow 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x_2 - (-0,3 + 9,7\lambda) + 4\lambda = 0 && \Rightarrow \quad x_2 = -0,1 + 1,9\lambda \\ (I) &\Rightarrow -x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 \\ &\Rightarrow \quad -x_1 + 3(-0,1 + 1,9\lambda) + (-0,3 + 9,7\lambda) - 2\lambda = 0 && \Rightarrow \quad x_1 = -0,6 + 13,4\lambda \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die (eindimensionale) Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 13,4 \\ 1,9 \\ 9,7 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,6 \\ -0,1 \\ -0,3 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe 3.

Vier Vektoren $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^4$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^4$, falls sie linear unabhängig sind. Dies ist äquivalent dazu, dass das Gleichungssystem $(v_1, v_2, v_3, v_4|0)$ eine **eindeutige** Lösung hat. Dies kann über das Gaußverfahren geprüft werden.

a)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad (III) \leftarrow (I) - (III)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad (III) \leftarrow (III) + (II)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad (IV) \leftarrow 2(IV) + (III)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir sehen, dass keine Dreiecksgestalt angenommen wird. Das Gleichungssystem ist also nicht eindeutig lösbar und somit bilden die vier Vektoren keine Basis.

b)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad swap: \quad (I) \leftrightarrow (IV)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad (II) \leftarrow (I) - (II)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} (III) \leftarrow (II) + (III) \\ (IV) \leftarrow (II) - (IV) \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad (IV) \leftarrow 6(IV) - 5(III)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Wir sehen, dass das Gleichungssystem Dreiecksgestalt annimmt. Das bedeutet, dass dieses System eindeutig lösbar ist. Die vier Vektoren sind also linear unabhängig und bilden somit eine Basis.

Aufgabe 4.

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 4 & 0 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & -3 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (II) \leftarrow 4(II) + 5(I) \\ (III) \leftarrow 4(III) + (I) \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 4 & 0 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -32 & 25 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 4 & -3 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ swap: \quad (II) \leftrightarrow (III) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 4 & 0 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 4 & -3 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -32 & 25 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ (IV) \leftarrow 32(IV) + (III) \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 4 & 0 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 4 & -3 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -32 & 25 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 & 5 & 4 & 0 & 32 \end{array}\right) \begin{array}{l} (I) \leftarrow 25(I) - (IV) \\ (II) \leftarrow 25(II) + 3(IV) \\ (III) \leftarrow (III) - (IV) \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 100 & 0 & -100 & 0 & 20 & -4 & 0 & 32 \\ 0 & -300 & 100 & 0 & 40 & 12 & 100 & 96 \\ 0 & 0 & -32 & 0 & 0 & 0 & 0 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & 25 & 5 & 4 & 0 & 32 \end{array}\right) \begin{array}{l} (I) \leftarrow 32(I) - 100(III) \\ (II) \leftarrow 32(II) + 100(III) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 3200 & 0 & 0 & 0 & 640 & -128 & 0 & 2176 \\ 0 & -9600 & 0 & 0 & 1280 & 384 & 3200 & -128 \\ 0 & 0 & -32 & 0 & 0 & 0 & 0 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & 25 & 5 & 4 & 0 & 32 \end{array}\right)$$

Damit erhalten wir insgesamt:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{25} & 0 & \frac{17}{25} \\ -\frac{2}{15} & -\frac{1}{25} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{75} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{25} & 0 & \frac{32}{25} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.

Zuerst wird das Gaußverfahren angewendet.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 & 2\alpha & 0 \\ -1 & 3 & \alpha-1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -\alpha & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (II) \leftarrow \alpha(I) - (II) \\ (III) \leftarrow (I) + (III) \\ (IV) \leftarrow 2(I) - (IV) \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -2\alpha & 0 \\ 0 & 4 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \alpha & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ swap: \quad (II) \leftrightarrow (III) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -2\alpha & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \alpha & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ (IV) \leftarrow (II) - 2(IV) \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -2\alpha & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ (IV) \leftarrow (III) - (IV) \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir müssen die beiden Fälle $\alpha = 0$ und $\alpha \neq 0$ unterscheiden.

Fall $\alpha = 0$:

Hier nimmt die erweiterte Koeffizientenmatrix folgende Gestalt an:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Dieses System ist nicht widersprüchlich, also lösbar. Es treten 2 nicht-triviale Zeilen auf. Also $\operatorname{rang}(A) = \dim(\operatorname{Bild}(f)) = 2$. Aus der Dimensionsformel folgt:

$$\dim(\operatorname{Kern}(f)) = 4 - \operatorname{rang}(f) = 2.$$

Wir müssen also zwei unabhängige Parameter wählen. Z.B. $x_3 = \lambda$ und $x_4 = \mu$. Dann gilt:

$$\begin{array}{rlll} (II) \Rightarrow 4x_2 = 0 & & \Rightarrow & x_2 = 0 \\ (I) \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0 & \Rightarrow \quad x_1 + \lambda = 0 & \Rightarrow & x_1 = -\lambda \end{array}$$

Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Kern}\,(f) &= \left\{ \begin{pmatrix} -\lambda \\ 0 \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \mathrm{span} \left(\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right)
\end{aligned}$$

Als Basis für $\mathrm{Bild}\,(f)$ können die ersten beiden Spalten der ursprünglichen Matrix dienen, da diese linear unabhängig sind.

$$\mathrm{Bild}\,(f) = \mathrm{span} \left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

Fall $\alpha \neq 0$

Hier nimmt die erweiterte Koeffizientenmatrix folgende Gestalt an:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Dieses System ist nicht widersprüchlich, also lösbar. Es treten 3 nicht-triviale Zeilen auf. Also $\mathrm{rang}\,(A) = \dim\,(\mathrm{Bild}\,(f)) = 3$. Aus der Dimensionsformel folgt:

$$\dim\,(\mathrm{Kern}\,(f)) = 4 - \mathrm{rang}\,(f) = 1.$$

Wir müssen also nur einen unabhängigen Parameter wählen. Z.B. $x_4 = \mu$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
(III) &\Rightarrow \alpha x_3 - 2\alpha x_4 = 0 &&\Rightarrow \quad x_3 - 2x_4 = 0 &&\Rightarrow \quad x_3 = 2\mu \\
(II) &\Rightarrow 4x_2 + \alpha x_3 = 0 &&\Rightarrow \quad 4x_2 + 2\alpha\mu = 0 &&\Rightarrow \quad x_2 = -\frac{\alpha}{2}\mu \\
(I) &\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0 &&\Rightarrow \quad x_1 - \frac{\alpha}{2}\mu + 2\mu = 0 &&\Rightarrow x_1 = -\left(2 - \frac{\alpha}{2}\right)\mu
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Kern}\,(f) &= \left\{ \mu \begin{pmatrix} -\left(2 - \frac{\alpha}{2}\right) \\ -\frac{\alpha}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \mu \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \mathrm{span} \left(\left\{ \begin{pmatrix} -\left(2 - \frac{\alpha}{2}\right) \\ -\frac{\alpha}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right)
\end{aligned}$$

Als Basis für $\mathrm{Bild}\,(f)$ können die ersten drei Spalten der ursprünglichen Matrix dienen, da diese linear unabhängig sind.

$$\mathrm{Bild}\,(f) = \mathrm{span} \left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha - 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

Aufgabe 6.

a) Führen wir zuerst die Matrizenmultiplikation aus:

$$\begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{11}b_{12}+2b_{22}+3b_{32} & a_{11}+10 \\ 2a_{21} & a_{21}b_{12}+b_{22}+3b_{32} & a_{21}+8 \\ 2a_{31} & a_{31}b_{12}-b_{22}-2b_{32} & a_{31}-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & c_{13} \\ 4 & -3 & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert sofort:

$$\begin{aligned} 2a_{11} = 2 \Rightarrow &\quad a_{11} = 1 \\ 2a_{21} = 4 \Rightarrow &\quad a_{21} = 2 \\ 2a_{31} = 0 \Rightarrow &\quad a_{31} = 0 \end{aligned}$$

Damit vereinfacht sich die obige Gleichung zu:

$$\begin{pmatrix} 2 & b_{12}+2b_{22}+3b_{32} & 11 \\ 4 & 2b_{12}+b_{22}+3b_{32} & 10 \\ 0 & -b_{22}-2b_{32} & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & c_{13} \\ 4 & -3 & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix}$$

Wieder durch Koeffizientenvergleich erhalten wir sofort:

$$\begin{aligned} c_{13} &= 11 \\ c_{23} &= 10 \\ c_{33} &= -6 \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der b-Koeffizienten müssen wir das folgende Gleichungssystem lösen.

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \quad (II) \leftarrow 2(I) - (II) \\ \rightsquigarrow &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} (II) \leftarrow \frac{1}{3}(II) \\ (III) \leftarrow (II) + 3(III) \end{array} \\ \rightsquigarrow &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (III) & & &\Rightarrow \quad b_{32} = 1 \\ (II) &\Rightarrow b_{22} + 1 = -1 & &\Rightarrow \quad b_{22} = -2 \\ (I) &\Rightarrow b_{12} + 2b_{22} + 3b_{32} = -3 \quad \Rightarrow \quad b_{12} - 4 + 3 = -3 & &\Rightarrow \quad b_{12} = -2 \end{aligned}$$

b) Berechnen wir zuerst die Inverse von A:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad (II) \leftarrow (II) + (I)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad (III) \leftarrow (III) + (II)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad (II) \leftarrow (II) + (III)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad (I) \leftarrow (I) + (II)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Somit erhalten wir:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit können wir nun direkt die gesuchte Matrix X berechnen.

$$A \cdot X = B \quad \Rightarrow \quad A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot B$$

$$\Rightarrow \quad X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.

Da die gesuchte Abbildung linear ist, kann sie durch eine Matrix $T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ dargestellt werden. Allgemein gilt bei solchen Transformationsmetrizen, dass die Bilder der Einheitsvektoren die Spalten der Matrix sind. Somit ergibt sich die gesuchte Matrix zu:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Die Spalten der Matrix sind offensichtlich linear unabhängig (sie sind sogar orthonormal!). Somit ist $\operatorname{rang}(T) = 3$. Also ist T surjektiv. Aus der Dimensionsformel folgt $\dim(\operatorname{Kern}(T)) = 0$. Also ist T auch injektiv. Damit ist ϕ_T insgesamt bijektiv.
Die Umkehrabbildung ergibt sich über die inverse Matrix.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad (II) \leftarrow (II) - (I)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad (I) \leftarrow 2(I) - (II)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Damit ergibt sich die Umkehrabbildung $\phi_T^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zu:

$$\phi_T^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot x.$$

Es fällt auf, dass die Inverse T^{-1} zur Matrix T offenbar ihre Transponierte ist. Dies ist eine charakterisierende Eigenschaft von *orthogonalen* Matrizen. Das sind Matrizen, die eine Transformation zwischen orthonormalen Koordinatensystemen beschreiben.