

**Aufgabe 1.**

Bestimmen Sie mit dem Gauß-Jordan-Verfahren die Inverse  $A^{-1} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  zu

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Unter welchen Bedingungen ist  $A$  überhaupt invertierbar?

**Aufgabe 2.**

Lösen Sie folgende Gleichungssysteme:

a)  $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 3 & 8^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{32} \\ \sqrt{18} \end{pmatrix}$

b)  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ -7 & 18 & -4 & 1 \\ -2 & \frac{1}{2} & 13 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

c)  $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \\ -6 & 5 & 7 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

**Aufgabe 3.**

Bilden folgende Vektoren eine Basis des  $\mathbb{R}^4$ ?

a)  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

b)  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

**Aufgabe 4.**

Invertieren Sie folgende Matrix:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 & 1 \\ -5 & 0 & -3 & 5 \\ -1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

**Aufgabe 5.**

Berechnen Sie abhängig von  $\alpha \in \mathbb{R}$  die Dimension  $\dim(f(\mathbb{R}^4)) = \dim(\text{Bild}(f))$  und die Dimension  $\dim(\text{Kern}(f))$  sowie je eine Basis von  $\text{Bild}(f)$  und  $\text{Kern}(f)$  der Abbildung  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ,  $x \mapsto A \cdot x$  mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 & 2\alpha \\ -1 & 3 & \alpha - 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -\alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}.$$

**Aufgabe 6.**

a) Ersetzen Sie in der folgenden Gleichung die Variablen durch Zahlen:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 2 & 3 \\ a_{21} & 1 & 3 \\ a_{31} & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & b_{12} & 1 \\ 0 & b_{22} & 2 \\ 0 & b_{32} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & c_{13} \\ 4 & -3 & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie die Matrix  $X \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , indem sie die Inverse von  $A$  berechnen.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{=: A} \cdot X = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}}_{=: B}$$

**Aufgabe 7.**

Bestimmen Sie diejenige lineare Abbildung  $\phi_T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , welche folgende Koordinatentransformation durchführt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ist diese Abbildung surjektiv, injektiv, bijektiv? Geben Sie ggf. die Umkehrabbildung an. Was fällt auf?