Ferienkurs Lineare Algebra

Wintersemester 2009/2010

Lösungen **Lineare Abbildungen und Matrizen** Blatt 2

1 Linearität von Abbildungen

1. Welche dieser Abbildungen ist ein Gruppenhomomorphismus? Geben Sie eine kurze Begründung an!

   a) $f : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +),\ f(n) := 5 \cdot n$

   f ist linear, denn es gilt $f(n+m) = 5 \cdot (n+m) = f(n) + f(m)$

   b) $f : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{R}, \cdot),\ f(n) := x^n \quad x \neq 0$

   f ist linear, denn es gilt $f(n+m) = x^{n+m} = x^n \cdot x^m = f(n) \cdot f(m)$

   c) Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppen mit neutralem Element e und $a \in G$.

   $$\tau_a : (G, \cdot) \to (G, \cdot),\ \tau_a(g) := a \cdot g$$

   τ_a ist für $a \neq e$ nicht linear, da $\tau_a(g \cdot h) = a \cdot (g \cdot h) \neq (a \cdot g) \cdot (a \cdot g) = \tau_a(g) \cdot \tau_a(h)$. Für $a = e$ ist τ_a linear, da $e \cdot e = e$ gilt.

   d) $f : (\mathbb{C}^*, \cdot) \to (\mathbb{R}, \cdot),\ f(z) := |z|$

   f ist linear, denn es gilt $f(z \cdot w) = |z \cdot w| = \sqrt{\overline{(z \cdot w)}(z \cdot w)} = \sqrt{\bar{z}z} \cdot \sqrt{\bar{w}w} = f(z) \cdot f(w)$

2. Welche dieser Abbildungen ist ein Vektorraumhomomorphismus? Geben Sie eine kurze Begründung!

   a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) := xy$

   f ist nicht linear , denn es gilt $f(2, 2) = 4 \neq 2 = f(1, 1) + f(1, 1))$

   b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y) := \begin{pmatrix} -x + y \\ 2x - 3y \end{pmatrix}$

f ist linear , denn es gilt

$$f(x+v, y+w) \begin{pmatrix} -(x+v)+(y+w) \\ 2(x+v)-3(y+w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+y \\ 2x-3y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -v+w \\ 2v-3w \end{pmatrix} = f(x,y)+f(v,w)$$

und

$$f(\lambda x, \lambda y) = \begin{pmatrix} -(\lambda x)+\lambda y \\ 2(\lambda x)-3(\lambda y) \end{pmatrix} = \lambda f(x,y)$$

---

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ f(x) := \begin{pmatrix} 2x \\ x-2 \end{pmatrix}$

Die Abbildung ist wegen $f(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ nicht linear.

---

d) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) := \langle a, z \rangle, \quad a \in \mathbb{C}$
(Es ist $\mathbb{C}$-Linearität zu prüfen.)

Die Abbildung f ist wegen $f(\lambda z) = \bar{\lambda} f(z)$ für $\lambda \in \mathbb{C}$ nicht linear.

---

e) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) := \langle z, a \rangle, \quad a \in \mathbb{C}$
(Es ist $\mathbb{C}$-Linearität zu prüfen.)

Die Abbildung ist linear. Die sieht man durch

$$f(\lambda z) = \lambda f(z), \quad \text{für } \lambda \in \mathbb{C}$$

und

$$f(z+w) = \langle z+w, a \rangle = f(z) + f(w)$$

---

2 Surjektiv, Injektiv, Bijektiv

1. Bestimmen Sie die Urbilder folgender Mengen unter den angegeben Funktionen.

a)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z},\ f(x) = [x] := \max_{k \in \mathbb{Z}, k \leqq x} (k)$$
$$U = \mathbb{N}_0,\ V = \{0, 2, 4\}$$

$f^{-1}(U) = [0, \infty[, \quad f^{-1}(V) = [0,1[\cap [2,3[\cap [4,5[$

---

b)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|$$
$$U =]-\infty, 0[,\ V =]-\infty, 0],\ W = [1,2]$$

$f^{-1}(U) = \varnothing, \quad f^{-1}(V) = 0, \quad f^{-1}(W) = [-2,-1] \cap [1,2]$

---

2. Bestimmen sie den Kern folgender Abbildungen. Was kann aus dem Ergebnis über die Injektivität aussagen?

   a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin(x)$

   $\ker(f) = \pi\mathbb{Z}$

   Die Funktion ist wegen $f(0) = f(\pi) = 0$ nicht injektiv.

   ---

   b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \cosh(x)$

   $\ker(f) = 0$

   Da die Funktion nicht linear ist, kann man nicht den Schluss auf das Globale machen.

   ---

3. Sind folgende Funktionen injektiv oder surjektiv, bzw. sogar bijektiv? Begründen Sie!

   a)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ g(x) = |x|$$

   ---

   f ist nicht surjektiv, da $|x| \geqq 0$. f ist nicht injektiv, da f(-1) = f(1).

   g ist surjektiv, da $f(x) = x$ für $x \geqq 0$. g ist wiederum nicht injektiv.

   ---

   b) Für $b \neq 0$ betrachte man:

$$f : [0, \infty[\to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - b^2 x$$
$$g : [\frac{b}{\sqrt{3}}, \infty[\to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - b^2 x$$
$$h :]-\infty, -b] \to]-\infty, 0],\ h(x) = x^3 - b^2 x$$

   Betrachten wir zunächst einmal die Funktion $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \phi(x) = x^3 - b^2 x$ um uns einen Überblick zu verschaffen (Kurvendiskussion). Die Funktion hat Nullstellen bei $x_1 = 0,\ x_{2/3} = \pm b$, einen Sattelpunkt bei $x = 0$, lokales Maximum bei $x = -\frac{b}{\sqrt{3}}$ und ein lokales Minimum bei $x = +\frac{b}{\sqrt{3}}$.

   f ist nicht surjektiv, da $f(x) \geqq f(x = +\frac{b}{\sqrt{3}})$ für alle $x \in [0, \infty[$ gilt. f ist nicht injektiv, da $f(x = 0) = 0 = f(x = +b)$ gilt.

   g ist injektiv, da f für $x \geqq \frac{b}{\sqrt{3}}$ streng monoton wachsend ist. g ist nicht surjektiv, da $g(x) \geqq g(x = +\frac{b}{\sqrt{3}})$ für alle $x \in [\frac{b}{\sqrt{3}}, \infty[$.

   h ist injektiv, weil streng monoton steigend. h ist surjektiv, da h stetig und $h(x) \xrightarrow{x \to -\infty} -\infty$ und $h(x = -b) = 0$.

   ---

c) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{, für } n \text{ gerade} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{, für } n \text{ ungerade} \end{cases}$

---

f ist surjektiv, da man für n gerade n als $n = 2m$ mit $m \in \mathbb{N}_0$ darstellen, kann und daher gilt $f(n) = \frac{2m}{2} = m$. Ebenso kann man für n ungerade, $2m+1$ mit $m \in \mathbb{N}_0$ schreiben, so dass sich $f(n) = -\frac{2m+1+1}{2} = -(m+1)$ ergibt. Daher Überspannt f ganz $\mathbb{Z}$.

Die Injektivität sieht man folgendermaßen:

Angenommen $n \neq m$, dann gilt erstens für n und m gerade

$$n \neq m \Rightarrow \frac{n}{2} \neq \frac{m}{2} \Rightarrow f(n) \neq f(m)$$

zweiten für n und m ungerade

$$n \neq m \Rightarrow -\frac{n+1}{2} - \neq \frac{m+1}{2} \Rightarrow f(n) \neq f(m)$$

und drittens gilt trivialerweise für n gerade und m ungerade

$$n \neq m \Rightarrow \frac{n}{2} \neq -\frac{m+1}{2} \Rightarrow f(n) \neq f(m)$$

da n und m Elemente aus $\mathbb{N}$ sind.

---

4. Untersuchen sie die Folgenden Abbildungen auf Linearität, Surjektivität und Injektivität.

   a) $M_a : \mathrm{Abb}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Abb}(\mathbb{R}),\ M_a(f) = af,\ a \in \mathbb{R}$

M_a ist linear.

Außerdem ist die Abbildung für $a \neq 0$ surjektiv, denn falls $f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R})$ dann ist auch $\frac{f}{a} \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R})$ und es gilt $f = M_a(\frac{f}{a})$.

Die Abbildung ist für $a \neq 0$ auch injektiv, da $M_a(f) = M_a(g) \Leftrightarrow af = ag \Leftrightarrow f = g$ gilt.

Für $a = 0$ ist die Abbildung zwar linear, aber weder surjektiv, noch injektiv.

---

3 Lineare Abbildungen, Rang, ...

1. Zeigen Sie, dass für eine lineare Abbildung $\phi : X \to Y$ immer $\mathrm{Rang}(\phi) \leqq \dim(X) = n$ gilt.

Sei $\{x_i\}_{i=1,\ldots,n}$ eine Basis von X, dann gilt $x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ für $x \in X$. Da ϕ linear ist gilt weiterhin $\phi(x) \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i)$, kann man aus $\{\phi(x_i)\}_{i=1,\ldots,n}$ eine Basis für $\mathrm{Bild}(\phi)$ auswählen, welche maximal $\dim(X)$ Elemente hat. $\square$

---

2. Zeigen Sie, dass für eine Familie linear unabhängiger Vektoren $\{x_i\}_{i=1,\ldots,n}$ und eine lineare, injektive Abbildung $f : X \to Y$ auch die Familie $\{f(x_i)\}_{i=1,\ldots,n}$ linear unabhängig ist.

Da man die lineare Unabhängigkeit der Vektoren $\{f(x_i)\}_{i=1,\ldots,n}$ zeigen will, macht man folgenden Ansatz

$$0 = \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i) = f(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i)$$

Daraus folgt mit Hilfe der Injektivität der linearen Abbildung, dass $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0 \Rightarrow a_i = 0,\ \forall i = 1, ..., n$ gilt und man hat somit

$$0 = \sum_{i=1}^n a_i f(x_i) \Rightarrow a_i = 0,\ \forall i = 1, ..., n$$

also die lineare Unabhängigkeit, gezeigt.

---

3. Zeigen Sie, dass für eine lineare Abbildung ϕ

$$\dim(\ker(\phi)) = 0 \Rightarrow \ker \phi = \{0\}$$

gilt.

Hinweis: Nutzen Sie aus, dass $\ker(\phi)$ ein Vektorraum ist.

Angenommen es gäbe ein $x \in \ker(\phi)$ mit $x \neq 0$ (beachte, dass wegen der Vektorraumeigenschaften immer $0 \in \ker(\phi)$ gilt), dann wäre wegen $f(\lambda x) = \lambda f(x) = 0$ auch $\lambda x \in \ker(\phi), \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$. Dann aber wäre $\dim(\ker(\phi)) \geqq 1$. Widerspruch! $\square$

---

4. Beweisen Sie Satz 1.5 aus der Vorlesung.

Zunächst $f(0) = 0$: Dies folgt sofort aus $f(0) = f(0 \cdot x) = 0 \cdot f(x) = 0$.

Falls die Familie $\{x_i\}_{i=1,\cdots,n}$ linear abhängig ist, dann gilt, dass eine Familie von Koeffizienten $\{a_i\}_{i=1,\cdot,n}$ mit $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$ und $\exists i \in \{1, \cdots, n\} : a_i \neq 0$ existiert. Dann gilt aber auch

$$f(0) = 0 = f(\sum_{i=1}^n a_i x_i) = \sum_{i=1}^n a_i f(x_i)$$

Daraus folgt, dass auch die Familie $\{f(x_i)\}_{i=1,\cdots,n}$linear abhängig ist.

Die Tatsache, dass f(X') ein Untevektorraum ist, folgt einfach aus der Linearität von f und der Untervektrorraumeigtenschaft von X'.

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \in f(X') \\ f(\lambda x) = \lambda f(x) \in f(X') \end{aligned}$$

Außerdem ist wegen $f(0) = 0$ die Menge $f(X')$ nicht leer.

Ebenso geht man für das Urbild vor. Man nutzt die Untervektorraumeigenschaft von Y' und die Linearität von f aus. Mit $x, x_1, x_2 \in f^{-1}(Y')$ gilt

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 = f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2) \in Y' \Rightarrow x_1 + x_2 \in f^{-1}(Y') \\ \lambda y = \lambda f(x) = f(\lambda x) \in Y' \Rightarrow \lambda x \in f^{-1}(Y') \end{aligned}$$

Wiederum ist wegen $0 \in Y'$ und $f(0) = 0$, auch wieder $0 \in f^{-1}(Y')$ und somit das Urbild nicht leer.

---

4 Matrizen als Darstellung linearer Abbildungen

1. Überprüfen Sie zunächst, ob es zu den angegebenen Bedingungen eine lineare Abbildung gibt und bestimmen Sie gegebenenfalls die Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{K}^n$.

   a) $f(\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad f(\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$

Die Abbildung existiert, da $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bilden.

Methode zur Bestimmung der Darstellungsmatrix: Man entwickle die Vektoren nach der entsprechenden Basis (hier einfacherweise die Standardbais)und nutze dann die Linearität (Voraussetzung!) der Abbildung an. Dann erhält man ein LGS, welches man lösen kann um die Matrixelemente zu bestimmen. Hier sei mit $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ die Standardbasis bezeichnet.

Aus den Bedingungen folgt:

$$\begin{aligned} f(e_1 + 3e_2) = e_1 &\quad \Leftrightarrow \quad & f(e_1) + 3f(e_2) = e_1 \\ f(2e_2) = 2e_2 &\quad \Leftrightarrow \quad & f(e_2) = e_2 \end{aligned}$$

Durch Subtraktion der zweiten Gleichung von der ersten, erhält man:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= e_1 - 3e_3 \\ f(e_2) &= e_2 \end{aligned}$$

Daraus ließt man einfach ab, dass die Darstellungsmatrix A von f, also $f(x) = A \cdot x$, folgendermaßen lauten muss:

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0\\-3 & 1\end{pmatrix}$$

Was man durch einsetzten von Probevektoren nachprüfen kann.

---

   b) $f(\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} \quad f(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \quad f(\begin{pmatrix}0\\-2\\4\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$

Da $2\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-2\\4\end{pmatrix}$ gilt, bilden die Vektoren keine Basis und somit muss überprüft werden, ob die Bedingungen sich nicht wiedersprechen. Wegen der Linearität von f müsste gelten:

$$f(\begin{pmatrix}0\\-2\\4\end{pmatrix}) = f(2\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}) = 2\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\4\end{pmatrix}$$

Dies widerspricht der 3. Bedingung von oben. Damit existiert keine lineare Abbildung mit den geforderten Eigenschaften.

---

   c) $f(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \quad f(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad f(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

Da die Vektoren eine Basis bilden erhält man nach bewährter Methode:

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\1 & 0 & 2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

---

2. Man betrachte folgenden Vektorraum $V = \operatorname{span}(\{1, t, t^2\})$ und die darauf definierte Abbildung $\phi : V \to V,\ f \mapsto f - f'$.

   a) Ist ϕ linear?

Da die Ableitung eine lineare Abbildung ist, gilt:

$$\phi(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g) - (\lambda f + \mu g)' = \lambda\phi(f) + \mu\phi(g)$$

---

   b) Geben Sie die Darstellungsmatrix für ϕ in der Basis $\{e_1 = 1, e_2 = t, e_3 = t^2\}$ an.

$$\begin{aligned} \phi(e_1) &= 1 && = e_1 \\ \phi(e_2) &= t - 1 && = -e_1 + e_2 \\ \phi(e_3) &= t^2 - 2t && = -2e_2 + e_3 \end{aligned}$$

Man ließt davon ab, dass

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Darstellungsmatrix von ϕ ist.

---

   c) Überprüfen sie Ergebnis mit Hilfe des Polynomes $P(t) = 5t^2 + 2t + 1$

Durch einfaches Ausrechnen erhält man

$$\phi(P(t)) = 5t^2 + 2t + 1 - (10t + 2) = 5t^2 - 8t - 1 \tag{1}$$

Das Polynom $P(t)$ entspricht dem Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ in V. Mit der Darstellungsmatrix A erhält man:

$$\phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Mit expliziter Angabe der Basis kann man dies auch als

$$-1 - 8t + 5t^2$$

was dem Ergebnis in (1) entspricht.

---

   d) Bestimmen sie den Rang von ϕ. Ist ϕ bijektiv?

Es gilt $\operatorname{Rang}(\phi) = 3$, da die Spaltenvektoren von A alle linear abhängig sind. Außerdem gilt nach der Dimensionsformel

$$\dim(V) = 3 = \operatorname{Rang}(\phi) + \dim\ker(\phi) \Rightarrow \dim(\ker(\phi)) = 0 \Rightarrow \ker(\phi) = 0$$

Daher ist die Abbildung injektiv, und, da sie außerdem zwischen gleichdimensionalen Räumen abbildet, automatisch auch surjektiv. Daher ist ϕ bijektiv und daher ein Automorphismus.

---

3. Man betrachte folgenden Vektorraum $V = \mathrm{span}(\{1, t, t^2, t^3\})$ und die darauf definierte Abbildung $\phi : V \to V,\ f \mapsto f'' - f' + f$.

   a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von ϕ in der Basis $\{e_1 = t^3 + t^2, e_2 = t^3 + t, e_3 = t^3 + 1, e_4 = 1\}$ an.

$$\begin{aligned}
\phi(e_1) &= -2e_1 + 4e_2 - e_3 + 3e_4 \\
\phi(e_2) &= -3e_1 + 7e_2 + 3e_3 + 2e_4 \\
\phi(e_3) &= -3e_1 + 6e_2 - 2e_3 + 3e_4 \\
\phi(e_4) &= e_4
\end{aligned}$$

Daraus liest man

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 & 0 \\ 4 & 7 & 6 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ab.

---

4. Seien X, Y Vektorräume mit $\dim(X) = 2, \dim(Y) = 3$ und $\phi : X \to Y$ eine lineare Abbildung. Sind dann folgende Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie!

   a) Die Abbildung ist surjektiv.

Falsch! Da $\mathrm{Rang}(\phi) \leqq 2$ folgt sofort, dass das ϕ niemals ganz Y abdecken könnte.

---

   b) Sei nun $\mathrm{Rang}(\phi) = 1$, dann ist ϕ injektiv.

Falsch! Wegen $\dim(V) = \mathrm{Rang}(\phi) + \dim(\ker(\phi)) \Rightarrow \dim\ker(\phi) = 1$ folgt, dass $\ker(\phi) \neq 0$ (beachten Sie hier, dass immer $0 \in \ker(\phi)$ gilt).

Damit ϕ injektiv ist, muss gelten $\mathrm{Rang}(\phi) = 2$.

---

   c) Es existiert eine Darstellungsmatrix aus $\mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{K})$ für ϕ

Falsch! Um eine Abbildung von einem 2 dimensionalen in einen 3 dimensionalen Raum abzubilden benötigt man eine Matrix aus $\mathrm{Mat}(3 \times 2, \mathbb{K})$. Man mache sich das folgendermaßen klar:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

---

5. Es sei die lineare Abbildung

$$\phi : X \to Y,\ \phi(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_2 - 4x_3 \end{pmatrix}$$

in Standardbasis gegeben, sowie zwei Paare Basen für X und Y

(α) $\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\}$ für X, und $\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\}$ für Y

(β) $\{\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\}$ für X, und $\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\}$ für Y

a) Geben sie die Darstellungsmatrix für jeweils den Fall (α) und (β) an.

Mit e_i sei die Basis in X und mit f_i die Basis in Y bezeichnet.

Fall (α):

$$\begin{aligned} \phi(e_1) &= 2f_1 \\ \phi(e_2) &= f_2 \\ \phi(e_3) &= 4f_1 - 3f_2 \end{aligned}$$

Davon liest man ab, dass die Darstellunsgmatrix

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

lauten muss.

Fall (β):

$$\begin{aligned} \phi(e_1) &= \frac{4}{5}f_1 + \frac{8}{5}f_2 \\ \phi(e_2) &= \frac{16}{5}f_1 - \frac{8}{5}f_2 \\ \phi(e_3) &= -\frac{4}{5}f_1 + \frac{2}{5}f_2 \end{aligned}$$

Davon liest man ab, dass die Darstellungsmatrix

$$D_\beta = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{16}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{8}{5} & -\frac{8}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

lauten muss.

---

b) Überprüfen Sie ihr Ergebnis mit Hilfe des Vektors in der Standardbasis

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

indem Sie diesen in den angegebenen Basen entwickeln und mit der Darstellungsmatrix multiplizieren.

Fall (α):

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0e_1 + e_2 + 2e_3$$

Anwendung auf die Abbildung ergibt

$$\phi(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} = 8f_1 - 5f_1$$

Anwendung auf die Darstellungsmatrix ergibt

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Fall (β):

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{3}{4}e_1 - \frac{1}{4}e_2 + \frac{3}{2}e_3$$

Anwendung auf die Abbildung ergibt

$$\phi(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} = -\frac{7}{5}f_1 + \frac{11}{5}f_2$$

Anwendung auf die Darstellungsmatrix ergibt

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{16}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{8}{5} & -\frac{8}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{5} \\ \frac{11}{5} \end{pmatrix}$$

---

c) Bestimmen Sie den Rang der Darstellungsmatrizen.

Es gilt $\text{Rang}(D_{\alpha/\beta}) = 2$.

---

6. Es seien der Vektrorraum $V = \text{span}(\{e_1 = 1, e_2 = t, e_3 = t^2\})$ und die Abbildung

$$\phi : V \to \mathbb{R},\ f \mapsto \int_{-1}^{1} f(t)dt$$

gegeben.

a) Ist die Abbildung linear? Begründen Sie!

Die Abbildung ist wegen der Linearitätseigenschaften des Integrals linear.

---

b) Bestimmen Sie die Darstellungmatrix, für die Abbildung in der angegebenen Basis.

$$\phi(1) = 0$$
$$\phi(t) = 1$$
$$\phi(t^2) = 0$$

Daher lautet die Darstellungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

---

c) Bestimmen Sie den Rang der Abbildung.

Da $\text{Rang}(A) = 1$, so gilt auch $\text{Rang}(\phi) = 1$.

---

5 Matrixmultiplikation

1. Bilden sie das Produkt aus folgenden Matrizen.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 & 2+3 \\ 1+8 & 1+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 9 & 13 \end{pmatrix}$$

---

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$$

---

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 20 \\ 12 & 6 & 27 \\ 17 & 6 & 17 \end{pmatrix}$$

---

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 8 & 11 & 8 \\ 12 & 8 & 11 & 9 \\ 13 & 10 & 12 & 11 \\ 13 & 12 & 15 & 10 \end{pmatrix}$$

---

2. Lässt sich aus den angegebenen Matrizen das Produkt $A \cdot B$ bilden? Führen Sie gegebenenfalls die Multiplikation aus.

   a) $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$

   Das Produkt lässt sich bilden. Ergebnis:

   $$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

   ---

   b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \end{pmatrix}$

   Das Produkt lässt sich nicht bilden.

   ---

   c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

   Das Produkt lässt sich bilden. Ergebnis:

   $$\begin{pmatrix} 26 & 12 \end{pmatrix}$$

   ---

   d) $A = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{3}{5} & \frac{20}{7} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 2 \\ \frac{7}{25} \end{pmatrix}$

   Das Produkt lässt sich bilden. Ergebnis:

   $$\frac{17}{5}$$

   ---

   e) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

   Das Produkt lässt sich nicht bilden.

   ---

   f) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 9 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

   Das Produkt lässt sich bilden. Ergebnis:

   $$\begin{pmatrix} 15 & 16 & 2 \\ 18 & 12 & 2 \\ 45 & 30 & 10 \end{pmatrix}$$

   ---

3. Bilden Sie für folgende Matrizen die Potenzen A^n, $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A^1 = A$$
$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$A^n = 0,\ \text{für } n \geq 2$$

---

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A^1 = A$$
$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A^{2n} = E_3,\ \text{für } n \in \mathbb{N}_0$$
$$A^{2n+1} = A,\ \text{für } n \in \mathbb{N}_0$$
