Ferienkurs Lineare Algebra

Wintersemester 2009/2010

Übungen **Lineare Abbildungen und Matrizen** Blatt 2

1 Linearität von Abbildungen

1. Welche dieser Abbildungen ist ein Gruppenhomomorphismus? Geben Sie eine kurze Begründung!
   a) $f : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +),\ f(n) := 5 \cdot n$
   b) $f : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{R}, \cdot),\ f(n) := x^n \quad x \neq 0$
   c) Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppen mit neutralem Element e und $a \in G$.
   $$\tau_a : (G, \cdot) \to (G, \cdot),\ \tau_a(g) := a \cdot g$$
   d) $f : (\mathbb{C}^*, \cdot) \to (\mathbb{R}, \cdot),\ f(z) := |z|$
2. Welche dieser Abbildungen ist ein Vektorraumhomomorphismus? Geben Sie eine kurze Begründung!
   a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) := xy$
   b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y) := \begin{pmatrix} -x + y \\ 2x - 3y \end{pmatrix}$
   c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ f(x) := \begin{pmatrix} 2x \\ x - 2 \end{pmatrix}$
   d) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) := \langle a, z\rangle, \quad a \in \mathbb{C}$
   (Es ist $\mathbb{C}$-Linearität zu prüfen.)
   e) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) := \langle z, a\rangle, \quad a \in \mathbb{C}$
   (Es ist $\mathbb{C}$-Linearität zu prüfen.)

2 Surjektiv, Injektiv, Bijektiv

1. Bestimmen Sie die Urbilder folgender Mengen unter den angegeben Funktionen.
   a)
   $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z},\ f(x) = [x] := \max_{k \in \mathbb{Z}, k \leqq x} (k)$$
   $$U = \mathbb{N}_0,\ V = \{0, 2, 4\}$$
   b)
   $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|$$
   $$U =]-\infty, 0[,\ V =]-\infty, 0],\ W = [1, 2]$$
2. Bestimmen sie den Kern folgender Abbildungen. Was kann aus dem Ergebnis über die Injektivität ausgesagt werden?

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin(x)$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \cosh(x)$

3. Sind folgende Funktionen injektiv oder surjektiv, bzw. sogar bijektiv? Begründen Sie!

a)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ g(x) = |x|$$

b) Für $b \neq 0$ betrachte man:

$$f : [0, \infty[\to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - b^2 x$$
$$g : [\frac{b}{\sqrt{3}}, \infty[\to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - b^2 x$$
$$h :]-\infty, -b] \to]-\infty, 0],\ h(x) = x^3 - b^2 x$$

c)

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & , \text{ für } n \text{ gerade} \\ -\frac{n+1}{2} & , \text{ für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

4. Untersuchen sie die Abbildung

$$M_a : \mathrm{Abb}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Abb}(\mathbb{R}),\ M_a(f) = af,\ a \in \mathbb{R}$$

auf Linearität, Surjektivität und Injektivität.

3 Lineare Abbildungen, Rang, ...

1. Zeigen Sie, dass für eine lineare Abbildung $\phi : X \to Y$ immer $\mathrm{Rang}(\phi) \leqq \dim(X) = n$ gilt.
2. Zeigen Sie, dass für eine Familie linear-unabhängiger Vektoren $\{x_i\}_{i=1,\ldots,n}$ und eine lineare, injektive Abbildung $f : X \to Y$ auch die Familie $\{f(x_i)\}_{i=1,\ldots,n}$ linear-unabhängig ist.
3. Zeigen Sie, dass für eine lineare Abbildung ϕ

$$\dim(\ker(\phi)) = 0 \Rightarrow \ker \phi = \{0\}$$

gilt.

Hinweis: Nutzen Sie aus, dass $\ker(\phi)$ ein Vektorraum ist.

4. Beweisen Sie Satz 1.5 aus der Vorlesung.

4 Matrizen als Darstellung linearer Abbildungen

1. Überprüfen Sie zunächst, ob es zu den angegebenen Bedingungen eine lineare Abbildung gibt und bestimmen Sie gegebenenfalls die Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{K}^n$.

a) $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad f(\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $f(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ $\quad f(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\quad f(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

2. Man betrachte folgenden Vektorraum $V = \mathrm{span}(\{1, t, t^2\})$ und die darauf definierte Abbildung $\phi : V \to V,\ f \mapsto f - f'$.
   a) Ist ϕ linear?
   b) Geben Sie die Darstellungsmatrix für ϕ in der Basis $\{e_1 = 1, e_2 = t, e_3 = t^2\}$ an.
   c) Überprüfen sie Ergebnis mit Hilfe des Polynomes $P(t) = 5t^2 + 2t + 1$
   d) Bestimmen sie den Rang von ϕ. Ist ϕ bijektiv?
3. Man betrachte folgenden Vektorraum $V = \mathrm{span}(\{1, t, t^2, t^3\})$ und die darauf definierte Abbildung $\phi : V \to V,\ f \mapsto f'' - f' + f$.
   a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von ϕ in der Basis $\{e_1 = t^3 + t^2, e_2 = t^3 + t, e_3 = t^3 + 1, e_4 = 1\}$ an.
4. Seien X, Y Vektorräume mit $\dim(X) = 2, \dim(Y) = 3$ und $\phi : X \to Y$ eine lineare Abbildung. Sind dann folgende Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie!
   a) Die Abbildung ist surjektiv.
   b) Sei nun $\mathrm{Rang}(\phi) = 1$, dann ist ϕ injektiv.
   c) Es existiert eine Darstellungsmatrix aus $\mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{K})$ für ϕ
5. Es sei die lineare Abbildung

$$\phi : X \to Y,\ \phi(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix}2x_1 - x_2\\ x_2 - 4x_3\end{pmatrix}$$

   in Standardbasis gegeben, sowie zwei Paare Basen für X und Y

   (α) $\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\}$ für X, und $\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\}$ für Y

   (β) $\{\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\}$ für X, und $\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\}$ für Y

   a) Geben sie die Darstellungsmatrix für jeweils den Fall (α) und (β) an.
   b) Überprüfen Sie ihr Ergebnis mit Hilfe des Vektors in der Standardbasis

$$\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}$$

   indem Sie diesen in den angegebenen Basen entwickeln und mit der Darstellungsmatrix multiplizieren.
   c) Bestimmen Sie den Rang der Darstellungsmatrizen.
6. Es seien der Vektrorraum $V = \mathrm{span}(\{e_1 = 1, e_2 = t, e_3 = t^2\})$ und die Abbildung

$$\phi : V \to \mathbb{R},\ f \mapsto \int_{-1}^{1} f(t)dt$$

   gegeben.
   a) Ist die Abbildung linear? Begründen Sie!
   b) Bestimmen Sie die Darstellungmatrix, für die Abbildung in der angegebenen Basis.
   c) Bestimmen Sie den Rang der Abbildung.

5 Matrixmultiplikation

1. Bilden sie das Produkt aus folgenden Matrizen.

   a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

   b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

   c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

   d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2. Lässt sich aus den angegebenen Matrizen das Produkt $A \cdot B$ bilden? Führen Sie gegebenenfalls die Multiplikation aus.

   a) $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$

   b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \end{pmatrix}$

   c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

   d) $A = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{3}{5} & \frac{20}{7} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 2 \\ \frac{7}{25} \end{pmatrix}$

   e) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

   f) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 9 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

3. Bilden Sie für folgende Matrizen die Potenzen A^n, $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

   a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$