Aufgabe 1

a) (a) Abgeschlossenheit:

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 & c_1 + c_2 \end{pmatrix} \in S_2$$

(b) Assoziativität und Kommutativität folgen direkt aus Ass. und Komm. der skalaren Addition.

(c) Neutrales Element:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S_2$$

(d) Inverses:

$$\begin{pmatrix} -a & -b \\ -b & -c \end{pmatrix} \in S_2$$

b) Die Vektorraumaxiome sind offensichtlich erfüllt.
Dimension: 3, Basis zB:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Aufgabe 2

a) –

b) $\{3n + 10m \mid n, m \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$

c) $\mathbb{Z}$

d) $\mathbb{Q}^+ = \{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0\}$

e) $\{\left(\frac{1}{2}\right)^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{2^z \mid z \in \mathbb{Z}\}$

f) $\{w\}$

Aufgabe 3

a) Nein! Nicht abgeschlossen in der Skalarmuliplikation mit $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \end{pmatrix} \notin M_1$$

b) Nein!

$$-1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \notin M_2$$

c) Ja! Die Umkehrabbildung ist eindeutig auf ganz $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^{1/3} \\ y + x^{1/3} \end{pmatrix}$$

es ist also $M_3 = \mathbb{R}^2$.

d) Nein!

$$(x^7) - (x^7) = 0 \notin M_4$$

e) Nein! $0 \notin M_5$

Aufgabe 4

a) $d = 2$ Jeweils zwei der drei Vektoren sind linear unabhängig, eine Basis bilden zB:

$$B = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

b) $d = 2$, da nur zwei Koordinaten frei wählbar (z ist dann festgelegt, bringt also keinen zusätzlichen Freiheitsgrad). Zum Erhalt zweier linear unabhängiger Vektoren wähle zB $(x, y) = (1, 0)$, $(0, 1)$:

$$B = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \}$$

c) $d = 3$, da die drei Vektoren linear unabhängig sind. Basis zB:

$$B = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

d) $d = 1$ U beschreibt die Winkelhalbierende. Basis zB:

$$B = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

e) $d = 2$, $B = \{\cos(x), \sin(x)\}$

f) $d = 4$, $B = \{x^3, x^2, x, 1\}$

Aufgabe 5

a) korrekt ist nur $\dim(\text{spann}(M)) = 4$

b) zB $B = \{v_1, v_2, v_3, v_5\}$ oder $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ (macht allerdings Aufgabe c etwas langweilig ;)

c) Wende Gram-Schmidt Verfahren auf $B = \{v_1, v_2, v_3, v_5\}$ an:

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{w_2} = v_2 - \langle w_1, v_2 \rangle w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{w_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = w_3$$

$$\tilde{w_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = w_4$$

Es ist also

$$B' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Aufgabe 6

a) Für $\alpha = 4$ ist $v_3 = v_1 + v_2$, es ist also $d = 2$. Für $\alpha \neq 4$ ist $d = 3$.

b) Gram-Schmidt mit $\{v_1, v_2\}$:

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{w_2} = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 2/5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \frac{\sqrt{5}}{3} \begin{pmatrix} -4/5 \\ 2/5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{5}}{3} \begin{pmatrix} -4/5 \\ 2/5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Aufgabe 7

a)

$$3 \odot_6 2 = 0 \;\notin\; \mathbb{Z}_6 \setminus \{0\}$$

b) p muss primzahl sein. Anderenfalls besitzt es Teiler $a, b \in \mathbb{Z}_p$ mit $a \cdot b = p$ und deshalb $a \odot_p b = 0 \;\notin\; \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$.

c) Da es für jede der n Koordinaten p mögliche Werte gibt ist die Gesamtzahl der Elemente p^n. Da sich durch Multiplikation mit jedem $\lambda \in \mathbb{Z}_p$, $\lambda \neq 0$ ein Vielfaches ergibt erhält $p-1$ unterschiedliche Vielfache.

d) Ein 1-dimensionaler Untervektorraum besteht aus den Vielfachen eines Vektors $v \neq \vec{0}$. Um also die Anzahl der verschiedenen Untervektorräume zu erhalten, teilt man die Zahl der (von Null verschiedenen) Vektoren in $\mathbb{Z}_p^n$ durch die Zahl ihrer Vielfachen:

$$\#U = \frac{p^n - 1}{p - 1}$$

Klausuraufgabe:

$$\#U_5^3 = \frac{124}{4} = 31$$

e) zB:

$$B = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

Aufgabe 8

a) Nein.

$$\|2x\| = 2\sqrt{x_1^2 + 4x_2^4 + x_3^2} \neq 2\|x\|$$

b) Nein.

$$\| \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \| = -1 < 0$$

c) Nein.

$$\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \| = 0$$

d) Ja. (p-Norm mit $p = 4$)