DAVID FRANKE

FERIENKURS LINEARE ALGEBRA FÜR PHYSIKER

AUFGABEN MONTAG

WS 2009/2010

Aufgabe 1

Gegeben sei die Menge der symmetrischen 2×2-Matrizen

$$S_2 = \{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

a) Zeigen Sie: $(S_2, +)$ ist kommutative Gruppe.

b) Zeigen Sie: $(S_2, +, \cdot)$ mit der komponentenweisen Skalarmultiplikation $\lambda \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda b & \lambda c \end{pmatrix}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum (Dimension?).

Aufgabe 2

Geben Sie für folgende Mengen und Verknüpfungen jeweils die kleinstmögliche Gruppe an, die die Menge enthält.

a) Beispiel: $\{-2, 0, 2\}$ und $+$ $\quad \Rightarrow \quad$ $2\mathbb{Z} = \{2z \mid z \in \mathbb{Z}\}$

b) $\{3, 6, 9, 10\}$ und $+$

c) $\mathbb{N}$ und $+$

d) $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $\cdot$

e) $\{2\}$ und $\cdot$

f) $\{w\}$ und AND

Aufgabe 3

Handelt es sich bei den folgenden Mengen um Untervektorräume der angegebenen Vektorräume? (kurze Begründung / Gegenbeispiel)

a)
$$M_1 := \{\begin{pmatrix} 3z \\ 4z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

b)
$$M_2 := \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 \leq x_2 \leq x_3\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

c)
$$M_3 := \{\begin{pmatrix} -\mu^3 \\ \lambda + \mu \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

d)
$$M_4 := \{f \mid f \text{ Polynom vom Grad } 7\} \subseteq P(\mathbb{R})$$
$$(P(\mathbb{R}) := \text{Vektorraum der Polynome auf } \mathbb{R})$$

e)
$$M_5 := \{\mu x^2 + \lambda x + 1 \mid \mu, \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq P(\mathbb{R})$$

Aufgabe 4

Geben Sie für folgende Untervektorräume jeweils die Dimension und eine Basis an.

a)
$$U := \operatorname{spann}(\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}) \subseteq \mathbb{R}^3$$

b)
$$U := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 3x - y\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

c)
$$U := \operatorname{spann}(\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}) \subseteq \mathbb{R}^3$$

d)
$$U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0, \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\pi}{4}\} \cup \{(0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

e)
$$U := \operatorname{spann}(\cos(x), \sin(x)) \subseteq \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

f)
$$U := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ Polynom vom Grad n} \leq 3\} \subseteq \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

Aufgabe 5

Gegeben sei folgende Menge von Vektoren $M \subseteq \mathbb{R}^4$

$$M := \left\{ v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$$

a) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- ☐ $\dim(\operatorname{spann}(M)) = 4$
- ☐ $\operatorname{spann}(v_1, v_2, v_4) = \operatorname{spann}(v_3, v_5)$
- ☐ $\operatorname{spann}(v_1, v_3, v_5) = \operatorname{spann}(M)$
- ☐ $\dim(\operatorname{spann}(v_1, v_3, v_5) = \dim(\operatorname{spann}(M))$
- ☐ $\operatorname{spann}(v_1, v_2) = \operatorname{spann}(v_2, v_3) = \operatorname{spann}(v_1, v_3)$
- ☐ $v_1 \in \operatorname{spann}(v_2, v_3, v_5)$

b) Geben Sie eine Basis des von M erzeugten Untervektorraum des $\mathbb{R}^4$ an.

c) Wenden Sie nun das Gram-Schmidt Verfahren an, um eine Orthonormalbasis zu erhalten.

Aufgabe 6

Gegeben seien folgende Vektoren im $\mathbb{R}^3$: $v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}1\\\alpha\\1\end{pmatrix}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Welche Dimension hat der von den v_i aufgespannte Untervektorraum $U \subseteq \mathbb{R}^3$? Machen Sie eine Fallunterscheidung.

b) Wählen Sie α nun so, dass $\dim(U) = 2$ und geben Sie eine Orthonormalbasis von U an.

Aufgabe 7

Gegeben sei $\mathbb{Z}_p := \{0, 1, \dots, p-1\}$ $(p = 1, 2, \dots)$ mit den Verknüpfungen

$$a \oplus_p b = (a + b) \bmod p \qquad \text{und} \qquad a \odot_p b = (a \cdot b) \bmod p$$

a) Es sei $p = 6$. Zeigen Sie: $(\mathbb{Z}_6 \setminus \{0\}, \odot_6)$ ist keine Gruppe.

b) Unter welcher Bedingung an p ist $(\mathbb{Z}_p, \oplus_p, \odot_p)$ Vektorraum?

c) Wieviele verschiedene Vektoren beinhaltet der $\mathbb{Z}_p^n$ $(n = 1, 2, \dots)$? Wie viele Vielfache besitzt ein Element jeweils?

d) Finden Sie einen Ausdruck für

$$\#\{U \subseteq \mathbb{Z}_p^n \mid U \text{ Untervektorraum der Dimension 1 }\}.$$

e) Geben Sie eine Basis des $\mathbb{Z}_3^2$ an.

Aufgabe 8

Bei welchen der folgenden Abbildungen $\|\cdot\| : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ handelt es sich um Normen (Begründung!)?

☐
$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^4 + x_3^2}$$

☐
$$\|x\| = \max_{i=1}^{3} x_i$$

☐
$$\|x\| = \max_{i=1}^{2} |x_i|$$

☐
$$\|x\| = \left(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4\right)^{1/4}$$