Ferienkurs *Quantenmechanik* – Sommer 2009

Übungsklausur (90 Minuten)

1 δ-Potential (42/88 P, Ring, Semestrale 2002)

In der Mitte eines unendlich hohen Potentialtopfs der Breite $2a$ befindet sich eine δ-Barriere $V(x) = \lambda \cdot \delta(x)$ mit $\lambda > 0$.

1. Betrachten Sie den Ansatz
$$\psi(x) = A \cdot e^{ikx} + B \cdot e^{-ikx}$$
jeweils in den Gebieten links und rechts von der Barriere.
2. Stellen Sie die Randbedingungen bei $x = \pm a$ und die Anschlussbedingungen bei $x = 0$ auf.
3. Bestimmen Sie die Koeffizienten der Wellenfunktion.
4. Welche Parität besitzen die Wellenfunktionen?
5. Geben Sie die Normierung der Wellenfunktionen an.

2 Starrer Rotator (14/90 P, DVP 2004, Lindner)

Ein starrer Rotator mit Trägheitsmoment I wird durch den Hamiltonoperator

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2 \cdot I} \vec{L}^2$$

beschrieben. $\vec{L}$ ist der Drehimpulsoperator.

1. Welche Werte kann die Energie des Systems annehmen und wie ist der Entartungsgrad der Energieeigenwerte? (4 P)
2. Der Rotator besitze nun ein magnetisches Dipolmoment $\vec{\mu}$. In einem äußeren Magnetfeld $\vec{B}$ führt das zu einem Wechselwirkungsterm
$$\mathcal{H}_1 = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu B \cos\theta$$
$\mathcal{H}_1$ soll als Störung behandelt werden. Berechnen Sie die erste nichtverschwindende Korrektur für die Grundzustandsenergie des Rotators. (10 P)

Hinweis: Es gilt für die Kugelflächenfunktionen $Y_{lm}(\theta, \phi)$: $Y_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$, $Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$

3 Drehimpulsoperatoren (4/65 P, Semestrale SS2003, A. Buras)

Geben Sie den resultierenden Zustand, sofern er existiert, zu folgenden Operationen an. Die genaue Normierung der rotationssymmetrischen Zustände $|l, m\rangle$ mit den Drehimpulsquantenzahlen l und m ist nicht gefordert. (je 0.5 P)

a) $L_+|1,0\rangle$
c) $L^2 L_+|2,1\rangle$
e) $L_+ L^2 L_+|7,5\rangle$
g) $L^2 L_+|1,-1\rangle$
b) $L_- L_+|1,1\rangle$
d) $L_-|1,2\rangle$
f) $L_- L^2|3,-3\rangle$
h) $L_+|0,0\rangle$

4 Harmonischer Oszillator mit Störterm (18/65 P, Semestrale SS2003, A. Buras)

Gegeben sei ein harmonischer Oszillator mit einem zu α proportionalen quadratischen Störterm.

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \alpha\frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \tag{1}$$

$$= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega'^2 x^2 \quad \text{mit } \omega' = \omega\sqrt{1+\alpha} \tag{2}$$

- Drücken Sie (1) durch

  $$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right),\ a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{ip}{m\omega}\right)$$

  aus. (4 P)

- Sei $|n\rangle^{(0)}$ der Eigenzustand des ungestörten harmonischen Oszillators, $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$, mit $H|n\rangle^{(0)} = \hbar\omega(n+1/2)|n\rangle^{(0)}$.
  Beweisen Sie: $a^\dagger|n\rangle^{(0)} = \sqrt{n+1}|n\rangle^{(0)}$ und $a|n\rangle^{(0)} = \sqrt{n}|n\rangle^{(0)}$ (5 P)

- Betrachten Sie (1) als gestörten harmonischen Oszillator mit Störparameter α.
  1. Berechnen Sie die Energiekorrektur erster Ordnung. (2 P)
  2. Berechnen Sie die Zustandsvektoren $|n\rangle^{(1)}$ erster Ordnung. (1 P)

- Fassen Sie nun (2) als harmonischen Oszillator auf und vergleichen Sie die Energieeigenwerte aus der voherigen Aufgabe mit dem exakten Ergebnis, indem Sie ω' nach α entwickeln. (3 P)

5 Variationsmethode (DVP 2008, Schirmacher)

Betrachten Sie ein Teilchen in einem Potentialkasen mit unendlich hohen Wänden

$$V(x) = 0 \quad \text{für } |x| < L, \qquad V(x) = \infty \quad \text{für } |x| \geq L$$

Wählen Sie die Versuchswellenfunktion für den Grundzustand in diesem Potential in der Form

$$\psi^{var}(x) = A(L - |x|) \quad \text{für } |x| < L, \qquad \psi^{var}(x) = 0 \quad \text{für } |x| \geq L$$

Bestimmen Sie die Normierungskonstante A und berechnen Sie den Erwartungswert des Hamiltonoperators.