Ahmed Omran

Ferienkurs *Quantenmechanik 1* – Sommer 2009

Streuung (Lösungen)

1 Zeitabhängige Störungstheorie

Ein ungestörtes System habe u.a. die stationären Eigenzustände $|m\rangle$ und $|n\rangle$. Zu Beginn befinde sich das System im Eigenzustand $|n\rangle$. Nun werde zur Zeit $t = 0$ eine periodische Störung hinzugeschaltet:

$$V(t) = \Theta(t)\left(Fe^{-i\omega t} + F^\dagger e^{i\omega t}\right) \tag{1}$$

Berechne den Term $\langle m(t)|n(t)\rangle$ und die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit (s. Vorlesung). Interpretiere die einzelnen Terme.

LÖSUNG:
Aus der Vorlesung wissen wir:

$$\begin{aligned}
|P_{nm}|^2 &= \frac{1}{\hbar^2}\left|\int_0^t e^{i(E_m-E_n)t'/\hbar}\langle m|V|n\rangle\, dt'\right|^2 \\
&= \frac{1}{\hbar^2}\left|\int_0^t e^{i\omega_{mn}t'}\langle m|\left(Fe^{-i\omega t} + F^\dagger e^{i\omega t}\right)|n\rangle\right|^2 \\
&= \frac{1}{\hbar^2}\left|\int_0^t \left(e^{i(\omega_{mn}-\omega)t'}\langle m|F|n\rangle + e^{i(\omega_{mn}+\omega)t'}\langle m|F^\dagger|n\rangle\right) dt'\right|^2 \\
&= \frac{2\pi t}{\hbar}\delta\left(E_m - E_n - \hbar\omega\right)|\langle m|F|n\rangle|^2 + \frac{2\pi t}{\hbar}\delta\left(E_m - E_n + \hbar\omega\right)\left|\langle m|F^\dagger|n\rangle\right|^2
\end{aligned} \tag{2}$$

Die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeitintervall lautet

$$\Gamma_{nm} = \frac{|P_{nm}|^2}{t} = \frac{2\pi}{\hbar}\delta\left(E_m - (E_n + \hbar\omega)\right)|\langle m|F|n\rangle|^2 + \frac{2\pi}{\hbar}\delta\left(E_m - (E_n - \hbar\omega)\right)\left|\langle m\left|F^\dagger\right|n\rangle\right|^2 \tag{3}$$

Der erste Term beschreibt den Übergang zwischen dem Anfangszustand $|n\rangle$ und dem Endzustand $|m\rangle$, wobei die Energie E_m des Endzustands auf jeden Fall $E_n + \hbar\omega$ sein muss. Das System müsste also ein 'Energiequant' von $\Delta E = \hbar\omega$ aufgenommen. Beim zweiten Term ist der Übergang ähnlich, allerdings ist der Endzustand gegenüber dem Anfangszustand um den Energiequanten $\hbar\omega$ vermindert, was als Emission dieses Quants interpretiert werden kann.

2 Streuung

2.1 Streuung am Yukawa-Potential (**)

Betrachte ein allgemeines radialsymmetrisches Potential $V(\vec{r}) = V(r)$, mit $r = |\vec{r}|$.

- Zeige, dass

$$\int \mathrm{d}^3 r\, e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} V(r) = \frac{4\pi}{q} \int \mathrm{d}r\, rV(r) \sin(qr)$$

LÖSUNG:

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}^3 r\, e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} V(r) &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\infty} \mathrm{d}r\, r^2 V(r) \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\theta e^{iqr\cos\theta} \\
&= 2\pi \int_0^{\infty} \mathrm{d}r\, r^2 V(r) \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{iqr} \\
&= \underline{\underline{\frac{4\pi}{q} \int_0^{\infty} \mathrm{d}r\, rV(r) \sin(qr)}} \qquad (4)
\end{aligned}$$

- Betrachte nun den Spezialfall des *Yukawa-Potentials*:

$$V(r) = \frac{V_0 e^{-\mu r}}{r}$$

Zeige, dass mit $q \equiv \left|\vec{k} - \vec{k}'\right| = 2k \sin(\vartheta/2)$ in Born'scher Näherung gilt:

$$f(\vartheta) = -\frac{2mV_0}{\hbar^2} \frac{1}{q^2 + \mu^2}$$

LÖSUNG:

$$\begin{aligned}
f(\vartheta) &\approx -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{4\pi} \int \mathrm{d}^3 r\, e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} V(\vec{r}) = \frac{-2m}{q\hbar^2} \int_0^{\infty} \mathrm{d}r\, r \frac{V_0 e^{-\mu r}}{r} \sin(qr) = \underline{-\frac{2mV_0}{\hbar^2 q} \int_0^{\infty} \mathrm{d}r\, e^{-\mu r} \sin(qr)} \\
&= \frac{-2mV_0}{\hbar^2 q} \underbrace{\left(-\frac{1}{\mu} e^{-\mu r} \sin(qr)\right)\Bigg|_0^{\infty}}_{=0} - \frac{2mV_0}{\hbar^2 \mu} \int_0^{\infty} \mathrm{d}r\, e^{-\mu r} \cos(qr) \\
&= \frac{-2mV_0}{\hbar^2 \mu} \left(-\frac{1}{\mu} e^{-\mu r} \cos(qr)\right)\Bigg|_0^{\infty} - \frac{2mV_0 q}{\hbar^2 \mu^2} \int_0^{\infty} \mathrm{d}r\, e^{-\mu r} \sin(qr) \\
&= \underline{-\frac{2mV_0}{\hbar^2 \mu^2} - \frac{2mV_0 q}{\hbar^2 \mu^2} \int_0^{\infty} \mathrm{d}r\, e^{-\mu r} \sin(qr)} \qquad (5)
\end{aligned}$$

Bei den beiden unterstrichenen Termen kommt ein Integral der Form $\int \mathrm{d}r\, e^{-\mu r} \sin(qr)$ vor, da die zweimalige partielle Integration das Integral reproduziert hat. Auflösen nach diesem Integral liefert:

$$\begin{aligned}
-\frac{2mV_0}{\hbar^2 q} \int \mathrm{d}r\,(...) = -\frac{2mV_0}{\hbar^2 \mu^2} - \frac{2mV_0 q}{\hbar^2 \mu^2} \int \mathrm{d}r\,(...) &\Leftrightarrow \int \mathrm{d}r\,(...) = \frac{q}{\mu^2} - \frac{q^2}{\mu^2} \int \mathrm{d}r\,(...) \\
&\Leftrightarrow \int \mathrm{d}r\,(...) \left(1 + \frac{q^2}{\mu^2}\right) = \frac{q}{\mu^2} \\
&\Rightarrow \underline{\int \mathrm{d}r\,(...) = \frac{q}{\mu^2 + q^2}} \qquad (6)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(\vartheta) = \frac{-2mV_0}{\hbar^2 q} \int_0^\infty \mathrm{d}r\, e^{-\mu r} \sin(qr) = \underline{\underline{\frac{-2mV_0}{\hbar^2} \frac{1}{q^2+\mu^2}}} \tag{7}$$

- Wie lautet der differentielle Wirkungsquerschnitt für das Yukawa-Potential in Born'scher Näherung? Berechne daraus den totalen Wirkungsquerschnitt für diesen Fall.

LÖSUNG:

$$\underline{\underline{\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\vartheta)|^2 = \frac{4m^2V_0^2}{\hbar^4} \frac{1}{(q^2+\mu^2)^2}}} \tag{8}$$

Der totale Wirkungsquerschnitt lautet: $\sigma_{\text{tot}} = \int \mathrm{d}\Omega\, |f(\vartheta)|^2 = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^\pi \mathrm{d}\vartheta \frac{4mV_0}{\hbar^4} \frac{1}{(q^2+\mu^2)^2}$. Mit $q^2 = 4k^2 \sin^2(\vartheta/2) = 2k^2(1-\cos\vartheta)$ bekommen wir:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\text{tot}} &= \frac{8\pi m^2V_0^2}{\hbar^4} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\vartheta \frac{1}{(\mu^2+2k^2-2k^2\cos\vartheta)^2} = \frac{8\pi m^2V_0^2}{\hbar^4} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \frac{1}{(\mu^2+2k^2-2k^2x)^2} \\
&= \frac{8\pi m^2V_0^2}{\hbar^4} \frac{1}{2k^2} \left(\frac{1}{\mu^2+2k^2-2k^2x} \right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{4\pi m^2V_0^2}{\hbar^4 k^2} \left(\frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{\mu^2+4k^2} \right) \\
&= \frac{4\pi m^2V_0^2}{\hbar^4 k^2} \left(\frac{4k^2}{\mu^2+4k^2\mu^2} \right) = \underline{\underline{\frac{16\pi m^2V_0^2}{\hbar^4} \left(\frac{1}{\mu^4+4k^2\mu^2} \right)}}
\end{aligned} \tag{9}$$