Max Knötig Blatt 4

Ferienkurs *Quantenmechanik* – Sommer 2009

Quantenmechanik mit Näherungsmethoden

1 Mehrteilchensystem(**)

Zwei identische Bosonen werden in einem unendlich hohen Potentialtopf mit Wänden bei $x = 0, a$ platziert. Ihr Zustand sei das symmetrisierte Produkt der Einteilchenwellenfunktionen

$$|n_1 n_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|n_1\rangle|n_2\rangle + |n_2\rangle|n_1\rangle\right) \tag{1}$$

Mit der Einteilchenwellenfunktion in Ortsdarstellung

$$\langle x|n\rangle = \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \tag{2}$$

Wir lassen sie über ein Potential schwach miteinander wechselwirken

$$V(x_1, x_2) = -aV_0\delta(x_1 - x_2) \tag{3}$$

Berechnen sie die Grundzustandsenergie in erster Ordnung Störungstheorie.

Hinweis:

$$\int \sin^4(ax)\,dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4a}\sin(2ax) + \frac{1}{32}\sin(4ax) \tag{4}$$

2 Zweidimensionaler harmonischer Oszillator(***)

Der Hamiltonoperator eines zweidimensionalen harmonischen Oszillators habe die Form

$$H = \frac{\left(p_x^2 + p_y^2\right)}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2 + y^2\right) + \frac{1}{2}m\omega^2 \cdot 2\lambda xy \tag{5}$$

1. Berechnen sie durch die Störung hervorgerufene Energieänderung in 1. und 2. Ordnung Störungstheorie
   (a) für den Grundzustand. Benutzen sie Auf- und Absteigeoperatoren

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right) \tag{6}$$

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{ip}{m\omega}\right) \tag{7}$$

(b) für das zweifach entartete niedrigste angeregte Niveau (nur 1.Ordnung)
Berechnen Sie hierbei nicht nur

$$\langle 10|H'|10\rangle; \quad mit\ \langle n_x^0 n_y^0|H'|n_x^0 n_y^0\rangle$$

und

$$\langle 01|H'|01\rangle$$

sondern auch

$$\langle 10|H'|01\rangle \quad \& \quad \langle 01|H'|10\rangle$$

und schreiben sie die Ergebnisse als Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} \langle 10|H'|10\rangle & \langle 10|H'|01\rangle \\ \langle 01|H'|10\rangle & \langle 01|H'|01\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = E_1^1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{8}$$

Die Koeffizienten a und b sind die Koeffizienten vor $|10\rangle$ und $|01\rangle$, da jede Linearkombination von ihnen die Schrödingergleichung des ungestörten harmonischen Oszillators löst

$$|1^0\rangle = a|10\rangle + b|01\rangle \tag{9}$$

Wenn sie gerade Spass dran haben diagonalisieren sie die Matrix (Eigenwerte ausrechnen reicht aber auch). Die Eigenwerte entsprechen der Energiekorrektur, die Eigenvektoren den Zuständen in erster Ordnung *entarteter* Störungstheorie, welche durch die Störung ihre Entartung verlieren...

2. Berechnen sie die exakten Energieniveaus durch Koordinatentransformation auf

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

und vergleichen sie die Ergebnisse mit 1). *Hinweis: Das Quadrat eines Vektors a^2 ist invariant unter Drehungen in der x-y-Ebene!*

3 Eckige Versuchswelle(**)

Betrachten sie ein Teilchen in einem Potentialkasten mit unendlich hohen Wänden

$$V = \begin{cases} 0 & |x| < L \\ \infty & sonst. \end{cases} \tag{10}$$

Wählen sie als Versuchsfunktion

$$\psi^{var}(x) = \begin{cases} A \cdot (L - |x|) & |x| < L \\ 0 & sonst. \end{cases} \tag{11}$$

1. Bestimmen sie die Normierungskonstante A

2. Schätzen sie die Grundzustandsenergie mit der Welle (11) ab und vergleichen sie mit dem exakten Resultat

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 (n+1)^2}{8mL^2}; \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{12}$$

3. Beweisen sie folgende Aussage: Wenn eine Testwellenfunktion $|\psi\rangle$ orthogonal zum Grundzustand ist,
$$\langle\psi|n=0\rangle = 0 \tag{13}$$
so ist der normierte Erwartungswert des Hamiltonoperators größer als die Energie des *ersten* angeregten Zustandes.
$$\frac{\langle\psi|H|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} \geq E_1 \tag{14}$$
Gehen sie dabei vor, wie in der Vorlesung.

4. In einem symmetrischen Potential $V(x)$ ist auch der Grundzustand eine gerade Funktion. Jede antisymmetrische Testfunktion ist somit automatisch orthogonal zum Grundzustand. Verwenden sie die folgende Testwellenfunktion, um die Energie des ersten angeregten Zustandes von (10) abzuschätzen
$$\psi^{var}(x) = \begin{cases} -x-L & -L < x < -\frac{L}{2} \\ x & -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2} \\ -x+L & \frac{L}{2} < x < L \\ 0 & sonst. \end{cases} \tag{15}$$
und vergleichen sie das Ergebnis mit dem exakten Resultat (12)

4 Variation im harmonischen Oszillator(**)

Schätzen sie mithilfe der Variationsmethode die Grundzustandsenergie eines 1D harmonischen Oszillators ab, mit
$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \tag{16}$$
Und der Testwellenfunktion
$$\psi^{var}(x) = e^{-bx^2} \tag{17}$$
Warum kommt ihnen das Ergebnis bekannt vor?

5 Variation und Störungstheorie(*)

Beweisen sie,

1. mithilfe der Variationsmethode, dass die Grundzustandsnergie in erster Ordnung Störungstheorie größer ist als die tatsächliche Grundzustandsenergie
$$E_0^0 + E_0^1 \geq E_0 \tag{18}$$

2. dass die Energiekorrektur zum Grundzustand in zweiter Ordnung Störungstheorie immer negativ ist
$$E_0^2 \leq 0 \tag{19}$$

6 WKB-Tunnel(**)

Die WKB-Näherung ist praktisch bei Tunnelproblemen anwendbar

1. Berechnen sie die Tunnelwahrscheinlichkeit $T = \left|\frac{B}{A}\right|^2$, eine *große und breite* rechteckige Potentialstufe zu durchtunneln. Gehen sie dabei davon aus, dass die exponentiell ansteigende Lösung in der klassisch verbotenen Zone vernachlässigbar (dies ist erlaubt, wenn das Ergebnis für $T \ll 1$) ist und vergleichen sie die Amplituden der linksseitigen Wendepunktfunktion und rechtsseitigen Wendepunktfunktion.

$$\psi_{rechts}(x) = \begin{cases} \frac{A}{\sqrt{|p(x)|}} exp\left[-\frac{1}{\hbar}\int_{x_2}^{x} |p(x')|\, dx'\right] & f\ddot{u}r\ x > x_2 \\ \frac{2A}{\sqrt{p(x)}} sin\left[\frac{1}{\hbar}\int_{x}^{x_2} p(x')\, dx' + \frac{\pi}{4}\right] & f\ddot{u}r\ x < x_2 \end{cases} \tag{20}$$

$$\psi_{links}(x) = \frac{B}{\sqrt{p(x)}} sin\left[\frac{1}{\hbar}\int_{x_1}^{x} p(x')\, dx' + \frac{\pi}{4}\right]\ f\ddot{u}r\ x > x_1 \tag{21}$$

2. Die innerhalb eines Metalls quasifreien Leitungseleltronen haben dort eine geringere potentielle Energie als im Außenraum, sie können es deshalb nicht einfach so verlassen. Die Potentialstufe zum Außenraumpotential V_0 wird *Austrittsarbeit* W genannt. Sie beträgt an der Kante

$$W = V_0 - \epsilon_F \tag{22}$$

wobei ϵ_F die sog. *Fermienergie* ist.
Legt man senkrecht zur Oberfläche des Metalls ein elektrisches Feld an, verändert sich das Potential im Außeraum zu

$$V(q) = V_0 - eEq \tag{23}$$

Quantenmechanisches Tunneln wird dann möglich (Feldemission). Welcher Strom j_d ist außerhalb des Metalls nach anlegen eines Feldes beobachtbar? Nehmen sie an, dass nur Elektronen mit der Fermienergie für einen Tunnelprozess in Frage kommen und für den Strom gilt

$$j_d = j_0 \cdot T \tag{24}$$

7 Quantengravitation?(*)

Berechnen sie mithilfe der WKB-Näherung

1. Das Energiespektrum für ein Teilchen im linearisierten Gravitationsfeld der Erde

$$V = \begin{cases} mgz & f\ddot{u}r\ z < 0 \\ \infty & sonst. \end{cases} \tag{25}$$

Bemerkung: Das Ergebnis stimmt mit der exakten Rechnung ab dem ersten angeregten Niveau auf besser als 1% *überein*

2. Die Quantenzahl n, um einen Fußball von $0,5kg$ auf eine mittlere Höhe von 1 Meter zu bringen. Benutzen sie das Virialtheorem, um $\langle z\rangle$ auszurechnen.

8 Radialgleichung in WKB-Näherung(**)

Die WKB-Näherung ist ein Näherungsverfahren für eindimensionale Probleme. Sie kann aber auf Probleme erweitert werden, die in Produktwellen zerfallen.

1. Wie lautet die Schrödinungleichung für eine Radialwelle in einem kugelsymmetrischen Potential $V(r)$?

2. Wie lautet die Quantisierungsbedingung (WKB-Gleichung) für den Radialwellenanteil?

3. Benutzen sie ihre Ergebnisse, um die Energieniveaus von Wasserstoff in WKB-Näherung zu berechnen. Vergleichen Sie ihr Ergebnis für $n \gg \frac{1}{2}$ und $n \gg l$ mit den exakten Bohr-Niveaus

$$E_n = -\left(\frac{m}{2\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2\right)\frac{1}{n^2} \tag{26}$$

Hinweis:

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{x}\sqrt{(x-a)(b-x)} = \frac{\pi}{2}\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)^2 \tag{27}$$