Ferienkurs *Quantenmechanik 1* – Sommer 2009

Quantenmechanik in einer Dimension

1 1-dimensionale Probleme

1.1 Unendlich hoher Potentialtopf (*)

Ein Teilchen der Masse m ist in einem eindimensionalen Bereich $0 \leq x \leq a$ eingeschlossen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die normierte Wellenfunktion beschrieben durch:

$$\psi\left(x, t=0\right) = \sqrt{\frac{8}{5a}}\left[1 + \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right]\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \tag{1}$$

a) Wie lautet die Wellenfunktion zu einem späteren Zeitpunkt $t = t_0$?

b) Was ist der Erwartungswert der Energie bei $t = 0$ und $t = t_0$?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen bei $t = t_0$ innerhalb der linken Hälfte des Potentialtopfes ($0 \leq x \leq a/2$) zu finden? Wie kann man sich so ein Ergebnis anschaulich klarmachen?

1.2 1-dimensionales δ-Potential (**)

Gegeben sei das eindimensionale δ-förmige Potential:

$$V(x) = -\lambda\delta(x) \quad (\lambda > 0). \tag{2}$$

a) Welchen Anschlussbedingungen muss die Wellenfunktion $\psi(x)$ bei $x = 0$ genügen?
(Hinweis: Zeige, dass $\frac{d\psi}{dx}$ bei $x = 0$ unstetig ist, durch Integration der Schrödingergleichung über das infinitesimale Intervall $[-\varepsilon, \varepsilon]$.)

b) Es existiert genau ein gebundener Zustand in diesem Potential. Bestimme seinen Energie-Eigenwert und die normierte Wellenfunktion.

c) Betrachte die Streuzustände (d.h. $E > 0$) in diesem Potential. Unter dem Ansatz:

$$\psi\left(x\right) = \begin{cases} e^{ikx} + R\left(E\right)e^{-ikx} & \text{für } x < 0 \\ T\left(E\right)e^{ikx} & \text{für } x > 0 \end{cases}, \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \tag{3}$$

berechne die Reflexionsamplitude $R(E)$, den Reflexionskoeffizienten $r(E) = |R(e)|^2$, die Transmissionsamplitude $T(E)$ und den Transmissionskoeffizienten $t(E) = |T(E)|^2$.

2 Harmonischer Oszillator

2.1 Auf- und Absteigeoperatoren(*)

Betrachte einen 1-dimensionalen harmonischen Oszillator mit den Eigenzuständen $|n\rangle$, wobei $\hat{\mathcal{H}}\,|n\rangle = \hbar\omega\,(n+1/2)\,|n\rangle$, sowie die Auf- und Absteigeoperatoren aus der Vorlesung mit ihrer Kommutatorrelation $\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = \mathbb{1}$. Zeige, dass $\hat{a}^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$, und $\hat{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$, und damit, dass $\hat{a}^\dagger\hat{a}\,|n\rangle = n\,|n\rangle$.

2.2 Kohärente Zustände (***)

Die kohärenten Zustände $|\alpha\rangle$ sind die Eigenzustände des Vernichtungsoperators eines harmonischen Oszillators der Masse m und der Frequenz ω:

$$\hat{a}\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle$$

a) Zeige, dass für jede komplexe Zahl α die Identität

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle$$

erfüllt ist, wobei $|\alpha\rangle$ ein normierter Zustand ist, und $|n\rangle$ die normierten Eigenzustände des harmonischen Oszillators sind.

b) Zeige, dass die kohärenten Zustände minimale Unschärfe haben, d.h. $\Delta\hat{x}\Delta\hat{p} = \frac{\hbar}{2}$.

Hinweis: Verwende die folgenden Darstellungen durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren:

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}^\dagger + \hat{a}\right) \qquad \hat{p} = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(\hat{a}^\dagger - \hat{a}\right)$$

sowie: $\langle\alpha|\,\hat{a}^\dagger = \langle\alpha|\,\alpha^*$

c) Berechne die Zeitentwicklung eines kohärenten Zustands $|\alpha(t)\rangle$ und beweise, dass ein kohärenter Zustand mit der Zeit kohärent bleibt.

- Zusatzaufgabe: Zeige, dass die Ewartungswerte von $\hat{x}$ und $\hat{p}$ im kohärenten Zustand jeweils eine klassische harmonische Beweung vollziehen.

3 Allgemeine Sätze

3.1 Ehrenfest-Theorem (*)

Die Bedingung, dass man die Erwartungswerte quantenmechanischer Größen wie $\hat{x}$ und $\hat{p}$ wie klassische Größen behandeln kann, lautet (s. Vorlesung):

$$\langle F(x)\rangle = F\left(\langle x\rangle\right) \tag{4}$$

a) Leite mithilfe einer Taylorentwicklung von $F(x)$ eine Bedingung ab, für die die geforderte Relation gilt.

b) Welche bekannten Systeme erfüllen diese Bedingung? Wird sie erfüllt in einem System bestehend aus einem Teilchen im Potential $V(x) = \alpha x^4$? $(\alpha > 0)$

3.2 Virialsatz (**)

Der Virialsatz beschreibt den Zusammenhang zwischen den zeitlichen Mittelwerten der potentiellen und kinetischen Energie geschlossener physikalischer Systeme, z.B. eines Systems von Massenpunkten in einem endlichen Volumen, die einem Potential V ausgesetzt sind (Das Potential kann entweder auf gegenseitiger Wechselwirkung der Teilchen, oder auf einem externen Kraftfeld beruhen). Für ein Teilchen im Potential V gilt:

$$\overline{T} = \frac{1}{2}\overline{\vec{r} \cdot \vec{\nabla} V} \tag{5}$$

a) Zeige, dass sich für ein System mit Hamilton-Operator $\hat{\mathcal{H}} = \hat{T} + V\left(\hat{\vec{r}}\right) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V\left(\hat{\vec{r}}\right)$ die Operatorbeziehung

$$\frac{i}{\hbar}\left[\hat{\mathcal{H}}, \hat{\vec{r}} \cdot \hat{\vec{p}}\right] = 2T - \hat{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} V\left(\hat{\vec{r}}\right) \tag{6}$$

ergibt.

b) Zeige, dass der Erwartungswert des Kommutators $\left[\hat{\mathcal{H}}, \hat{A}\right]$ in einem stationären Zustand gleich Null ist, und leite mithilfe der Operatorbeziehung (6) eine Relation analog zu (5) für die quantenmechanischen Erwartungswerte von T und V in einem stationären Zustand her (Quantenmechanischer Virialsatz).

c) Wie lautet das Verhältnis $\langle T \rangle / \langle V \rangle$ für einen harmonischen Oszillator in 3D?
$\left(V(\vec{r}) = m\omega^2 r^2/2\right)$