CHRISTOPH NIEHOFF

Aufgabe 1.

Diese Aufgabe wird durch einfaches Anwenden der Additionstheoreme für Geschwindigkeiten in den Relativitätstheorien von Galileo und Einstein gelöst. Bezeichne v_R die Geschwindigkeit der Räuber, v_P der Geschwindigkeit des Polizeiwagens und v_K die Geschwindigkeit der Gewehrkugel relativ zur Waffe.

a) Nach Galileo addieren sich die Geschwindigkeiten einfach:

$$v_P + v_K = \frac{1}{2}c + \frac{1}{3}c = \frac{5}{6}c > v_R$$

Hier erreicht die Kugel also die Verbrecher.

b) Nach Einstein gilt folgendes Additionstheorem

$$\frac{v_P + v_K}{1 + \frac{v_P \cdot v_K}{c^2}} = \frac{\frac{5}{6}c}{1 + \frac{1}{6}} = \frac{5}{7}c < v_R$$

Hier erreicht die Kugel die Verbrecher also nicht.

Aufgabe 2.

a)

$$d^2(A,B) = c^2(t_A - t_B)^2 - (x_A - x_B)^2 - (y_A - y_B)^2 - (z_A - z_B)^2 = 50 > 0$$

Beide Ereignisse sind also *zeitartig* miteinander verbunden.

b) Es kann **kein** Inertialsystem K' geben, in dem beide Ereignisse gleichzeitig stattfinden. In diesem System wäre nämlich $t'_A - t'_B = 0$. Damit würde dann folgen

$$d^2(A,B) = \underbrace{c^2(t'_A - t'_B)^2}_{=0} - \underbrace{(\vec{\mathbf{r}'}_A - \vec{\mathbf{r}'}_B)^2}_{>0} < 0$$

Dies ist aber ein Widerspruch dazu, dass der vierdimensionale Abstand in allen Inertialsystemen gleich ist.

c) Wir betrachten hier nun das Intertialsystem K', das so durch Translation und Drehung aus dem System K hervorgeht, dass die Punkte A und B darin auf der x-Achsen liegen. Somit führen wir eine LORENTZ-Transformation in räumlicher Verbindungsrichtung der beiden Ereignisse durch.

Dann ist der räumliche Abstand im System K':

$$\begin{aligned} x'_B - x'_B &= \gamma(\tilde{x}_B - vt_B) - \gamma(\tilde{x}_A - vt_A) \\ &= \gamma((\tilde{x}_B - \tilde{x}_A) - v(t_B - t_A)) \\ &= \gamma(\Delta x - v\Delta t) \end{aligned}$$

Dieser Abstand verschwindet nun für $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} < c$.

Bemerkung: In gewissem Umfang kann die Richtung der Geschwindigkeit frei gewählt werden. Für andere Richtungen ergeben sich dann andere Beträge der Geschwindigkeit.

Aufgabe 3.

Die Phase lässt sich darstellen durch

$$\varphi = \omega t - \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{r}} = k_\mu x^\mu .$$

Sie ist somit ein Viererskalar und somit invariant unter LORENTZ-Transformationen.

Aufgabe 4.

a)

$$\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ v/c \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix}, \qquad \vec{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$$

Wir wenden nun das allgemeine Transformationsgesetz für elektromagnetische Felder (Bewegung in y-Richtung!) an:

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{E}}' &= \gamma \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ v/c \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \right) - \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \underbrace{\left(\begin{pmatrix} 0 \\ v/c \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix} \right)}_{=0} \begin{pmatrix} 0 \\ v/c \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \gamma \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} vB_z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= \gamma \begin{pmatrix} vB_z \\ 0 \\ E \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{B}}' &= \gamma \left(\begin{pmatrix} 0 \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} - \frac{1}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ v/c \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix} \right) - \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ v/c \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ v/c \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \gamma \left(\begin{pmatrix} 0 \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{v}{c^2} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) - \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \frac{v}{c} B_y \begin{pmatrix} 0 \\ v/c \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\gamma \frac{v}{c^2} E \\ B_y \\ \gamma B_z \end{pmatrix}, \qquad \text{da } \gamma - \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \beta^2 = 1
\end{aligned}$$

b) Im System K gilt:

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{B}} &= E B_z \\
\vec{\mathbf{E}}^2 - c^2 \vec{\mathbf{B}}^2 &= E^2 - c^2 (B_y^2 + B_z^2)
\end{aligned}$$

In K' gilt nun:

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{E}}' \cdot \vec{\mathbf{B}}' &= \gamma (v B_z) (-\gamma \frac{v}{c^2} E) + \gamma E (\gamma B_z) \\
&= \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) E B_z \\
&= E B_z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{E}}'^2 - c^2 \vec{\mathbf{B}}'^2 &= \gamma^2 (v^2 B_z^2 + E^2) - c^2 \left(\gamma \frac{v^2}{c^4} E^2 + B_y^2 + \gamma^2 B_z^2 \right) \\
&= \gamma^2 v^2 B_z^2 + \gamma^2 E^2 - \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} E^2 - c^2 B_y^2 - c^2 \gamma^2 B_z^2 \\
&= \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) E^2 - c^2 B_y^2 - c^2 \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) B_z^2 \\
&= E^2 - c^2 (B_y^2 + B_z^2)
\end{aligned}$$

Diese Werte sind also tatsächlich invariant unter diesem Inertialsystemwechsel.

Aufgabe 5.

a) Wir setzen den Ausdruck für $A'\mu$ in die Gleichung ein:

$$\begin{aligned}
\Box A'^{\mu} - \partial^{\mu}\partial_{\nu}A'^{\nu} = \mu_0 j^{\mu} &= \Box\left(A^{\mu} + \partial^{\mu}\chi\right) - \partial^{\mu}\partial_{\nu}\left(A^{\nu} + \partial^{\nu}\chi\right) \\
&= \Box A^{\mu} + \Box\partial^{\mu}\chi - \partial^{\mu}\partial_{\nu}A^{\nu} - \partial^{\mu}\underbrace{\partial_{\nu}\partial^{\nu}}_{=\Box}\chi \\
&\overset{(*)}{=} \Box A^{\mu} - \partial^{\mu}\partial_{\nu}A^{\nu} + \Box\partial^{\mu}\chi - \Box\partial^{\mu}\chi \\
&= \Box A^{\mu} - \partial^{\mu}\partial_{\nu}A^{\nu} \\
&= \mu_0 j^{\mu}
\end{aligned}$$

An der Stelle $(*)$ wurde angenommen, dass physikalische Felder glatt sind, sodass partielle Ableitungen vertauscht werden dürfen.

b) Zuerst schreiben wir die Phase aus: $k_{\nu}x^{\nu} = \omega t - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{r}}$. In LORENTZ-Eichung gilt nun:

$$\begin{aligned}
& \partial_{\mu}A^{\mu} = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \tfrac{1}{c}\tfrac{\partial}{\partial t}\left(a^0 \exp\left(-i\left(\omega t - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{r}}\right)\right)\right) + \operatorname{div}\left(\vec{\mathbf{a}}\exp\left(-i\left(\omega t - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{r}}\right)\right)\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & -\tfrac{1}{c}i\omega a^0 \exp\left(-i\left(\omega t - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{r}}\right)\right) + i\left(k_x a^1 + k_y a^2 + k_z a^3\right)\exp\left(-i\left(\omega t - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{r}}\right)\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & -\tfrac{\omega}{c}a^0 + \vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{k}} = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & a^0 = \tfrac{c\,\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{k}}}{\omega}
\end{aligned}$$

c) Mit der LORENTZ-Eichung ($\partial_{\mu}A^{\mu} = 0$) vereinfacht sich die Gleichung:

$$\begin{aligned}
& \Box A^{\mu} \\
= \quad & \tfrac{1}{c^2}\tfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left(a^{\mu}\exp\left(-i\left(\omega t - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{r}}\right)\right) - \vec{\nabla}^2\left(a^{\mu}\exp\left(-i\left(\omega t - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{r}}\right)\right)\right)\right. \\
= \quad & -\tfrac{1}{c^2}\omega^2 a^{\mu}\exp\left(-i\left(\omega t - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{r}}\right) + a^{\mu}\left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right)\exp\left(-i\left(\omega t - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{r}}\right)\right.\right. \\
= \quad & \left(-\tfrac{\omega^2}{c^2} + \vec{\mathbf{k}}^2\right)a^{\mu}\exp\left(-i\left(\omega t - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{r}}\right)\right) \\
= \quad & 0
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde die Dispersionsrelation verwendet.

Aufgabe 6.

a) Wir betrachten die inhomogenen MAXWELL-Gleichungen

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu} = \mu_0 j^{\nu}$$

Wird nun der Vierergradient ∂_{μ} auf diese Gleichung angewendet, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\partial_{\mu}j^{\mu} &= \frac{1}{\mu_0}\partial_{\mu}\partial_{\nu}F^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{\mu_0}\partial_{\mu}\partial_{\nu}\left(\partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu}\right) \\
&= \frac{1}{\mu_0}\left(\partial_{\mu}\partial^{\mu}\partial_{\nu}A^{\nu} - \partial_{\nu}\partial^{\nu}\partial_{\mu}A^{\mu}\right) \\
&= \frac{1}{\mu_0}\left(\Box\partial_{\nu}A^{\nu} - \Box\partial_{\mu}A^{\mu}\right) = 0
\end{aligned}$$

Dies ist die Kontinuitätsgleichung. Sie folgt hier also im Wesentlichen aus der Antisymmetrie des Feldstärketensors.

b) Da die homogenen MAXWELL-Gleichungen in kovarianter Form dargestellt sind, müssen wir und zuerst überlegen, wie die kovarianten Komponenten des Feldtensors aussehen.

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu} &= g_{\mu\lambda}g_{\nu\xi}F^{\lambda\xi} \\
&= g_{\mu\lambda}g_{\nu\xi}\left(\partial^\lambda A^\xi - \partial^\xi A^\lambda\right) \\
&= g_{\mu\lambda}g_{\nu\xi}\partial^\lambda A^\xi - g_{\mu\lambda}g_{\nu\xi}\partial^\xi A^\lambda \\
&= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
& \partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} \\
=\ & \partial_\lambda\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right) + \partial_\mu\left(\partial_\nu A_\lambda - \partial_\lambda A_\nu\right) + \partial_\nu\left(\partial_\lambda A_\mu - \partial_\mu A_\lambda\right) \\
=\ & \partial_\lambda\partial_\mu A_\nu - \partial_\lambda\partial_\nu A_\mu + \partial_\mu\partial_\nu A_\lambda - \partial_\lambda\partial_\mu A_\nu + \partial_\lambda\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu\partial_\nu A_\mu \\
=\ & 0
\end{aligned}$$

Aufgabe 7.

a) Hier muss lediglich die Doppelsumme ausgeführt werden. Dies wird exemplarisch für drei Komponenten gezeigt.

$$\begin{aligned}
\tilde{F}^{21} &= \frac{1}{2}\Bigg(\underbrace{\epsilon^{2100}}_{=0}F_{00} + \underbrace{\epsilon^{2101}}_{=0}F_{01} + \underbrace{\epsilon^{2102}}_{=0}F_{02} + \underbrace{\epsilon^{2103}}_{=-1}F_{03} \\
&\quad + \underbrace{\epsilon^{2110}}_{=0}F_{10} + \underbrace{\epsilon^{2111}}_{=0}F_{11} + \underbrace{\epsilon^{2112}}_{=0}F_{12} + \underbrace{\epsilon^{2113}}_{=0}F_{13} \\
&\quad + \underbrace{\epsilon^{2120}}_{=0}F_{20} + \underbrace{\epsilon^{2121}}_{=0}F_{21} + \underbrace{\epsilon^{2122}}_{=0}F_{22} + \underbrace{\epsilon^{2123}}_{=0}F_{23} \\
&\quad + \underbrace{\epsilon^{2130}}_{=1}F_{30} + \underbrace{\epsilon^{2131}}_{=0}F_{31} + \underbrace{\epsilon^{2132}}_{=0}F_{32} + \underbrace{\epsilon^{2133}}_{=0}F_{33}\Bigg) \\
&= \frac{1}{2}\left(-F_{03} + F_{30}\right) \\
&= -\frac{E_z}{c}
\end{aligned}$$

Bedenkt man nun, dass $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \neq 0$ nur für 4 **unterschiedliche** Zahlen μ, ν, α, β, so vereinfacht sich das Ganze:

$$\begin{aligned}
\tilde{F}^{20} &= \frac{1}{2}\left(\underbrace{\epsilon^{2013}}_{=1}F_{13} + \underbrace{\epsilon^{2031}}_{=-1}F_{31}\right) = B_y \\
\tilde{F}^{22} &= 0.
\end{aligned}$$

Analog werden die übrigen Komponenten berechnet. Insgesamt ergibt sich folgende Darstellung:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & \frac{1}{c}E_z & -\frac{1}{c}E_y \\ B_y & -\frac{1}{c}E_z & 0 & \frac{1}{c}E_x \\ B_z & \frac{1}{c}E_y & -\frac{1}{c}E_x & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Auch hier muss nur wieder aussummiert werden.

$$0 = \partial_\mu \tilde{F}^{\mu 0} = -\frac{\partial B_x}{\partial x} - \frac{\partial B_y}{\partial y} - \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{div}\vec{\mathbf{B}} = 0$$

$$\left.\begin{aligned}
0 = \partial_\mu \tilde{F}^{\mu 1} &= \tfrac{1}{c}\tfrac{\partial B_x}{\partial t} + \tfrac{1}{c}\tfrac{\partial E_z}{\partial y} - \tfrac{1}{c}\tfrac{\partial E_y}{\partial z} \\
0 = \partial_\mu \tilde{F}^{\mu 2} &= \tfrac{1}{c}\tfrac{\partial B_y}{\partial t} - \tfrac{1}{c}\tfrac{\partial E_z}{\partial x} + \tfrac{1}{c}\tfrac{\partial E_x}{\partial y} \\
0 = \partial_\mu \tilde{F}^{\mu 3} &= \tfrac{1}{c}\tfrac{\partial B_z}{\partial t} + \tfrac{1}{c}\tfrac{\partial E_y}{\partial x} - \tfrac{1}{c}\tfrac{\partial E_x}{\partial y}
\end{aligned}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial\vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$$