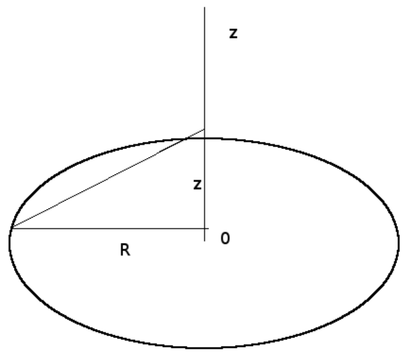
Christian Neumann
Musterlösung Donnerstag

Aufgabe 0 *Biot-Savart Gesetz*

In der xy-Ebene befinde sich eine kreisförmige Schleife mit Radius R, die von einem Strom I durchflossen wird. Der Mittelpunkt der Schleife befinde sich im Ursprung. Berechnen sie das B-Feld auf der z-Achse.
Lösungsvorschlag:
Das Biot Savart Gesetz lautet:



$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{l'} \times (\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3}$$

Zunächst der $|\vec{r} - \vec{r'}|$ Term. Aus der Zeichnung ist ersichtlich, dass

$$|\vec{r} - \vec{r'}| = (z^2 + R^2)^{1/2}$$

Nun zu $\vec{r} - \vec{r'}$. Für diesen gilt

$$\vec{r} - \vec{r'} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi' \\ R\sin\varphi' \\ -z \end{pmatrix} = R\hat{e}_{r'} - z\hat{e}_z$$

Der Strom läuft auf einer Kreisbahn mit Radius R in Richtung $\hat{e}_\varphi$. Das Wegelement ist also gegeben durch:

$$d\vec{l'} = R\hat{e}_{\varphi'} d\varphi'$$

Nun lässt sich das Integral auswerten:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{l'} \times (\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \left(\frac{R\hat{e}_{\varphi'} \times (R\hat{e}_{r'} - z\hat{e}_z)}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \left(-R^2\hat{e}_z - z\hat{e}_{r'} \right)$$

$$= -\frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{e}_z$$

Aufgabe 1 *Zirkulare Polarisation*

Zeigen Sie: Eine alternative Bedingung für zirkulare Polarisation ist:

$$\frac{E_x}{E_y} = \pm i$$

Lösungsvorschlag:
Dies gilt, da

$$\frac{E_x}{E_y} = \frac{|E_x| \exp(i\alpha)}{|E_y| \exp(i\beta)} = \frac{|E_x|}{|E_y|} \exp(i(\alpha - \beta)) \stackrel{!}{=} \pm i \quad \Rightarrow \quad |E_x| = |E_y|; \quad \exp(i(\alpha - \beta)) = \pm i$$

Für die elektrische Welle ergibt sich dann

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} \exp(i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)) = |E_x| \begin{pmatrix} \exp(i\alpha) \\ \exp(i\beta) \\ 0 \end{pmatrix} \exp(i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)) =$$

$$= |E_x| \begin{pmatrix} \exp(i(\alpha-\beta)) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega(t-\beta/\omega)) = |E_x| \begin{pmatrix} \exp(i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega(t-\beta/\omega) + \pi/2)) \\ \exp(i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega(t-\beta/\omega))) \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= |E_x| \begin{pmatrix} -\sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega(t-\beta/\omega)) \\ \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega(t-\beta/\omega)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Richtung von $\vec{E}$ rotiert also und ist zusätzlich noch in der Phase verschoben.

Aufgabe 2 *Reflexion an einem idealen Leiter*

Zeigen sie, dass bei einer Reflexion an einem idealen Leiter die reflektierte Welle um π in der Phase verschoben ist.
Lösungsvorschlag:
In ideale Leiter ist das elektrische Feld Null. Aus den Stetigkeitsbedingungen an der Grenzfläche folgt nun:

$$\epsilon_1(E_e^\perp + E_r^\perp) = 0$$

$$E_e^\| + E_r^\| =$$

Hieraus folgt, dass

$$\vec{E}_e = -\vec{E}_r = e^{i\pi} E_r$$

Die reflektierte Welle ist also um π in der Phase verschoben.

Aufgabe 3 *Polarisationsfilter*

Linear polarisiertes Licht treffe auf einen Polarisationsfilter. Dieser lasse nur E-Felder in Richtung einer Achse $\vec{P}$ durch ($P = 1$). Zeigen sie dass für das E-Feld hinter dem Polarisator gilt:

$$\vec{E}' = (\vec{E}\cdot\vec{P})\vec{P}$$

Lösungsvorschlag:
Es kommet nur der Anteil der Welle durch,der Parallel zu $\vec{P}$ ist. Dieser ist gegeben durch $E' = \vec{E}\cdot\vec{P}$ Die Welle ist nachher in $\vec{P}$ Richtung polarisiert. Für das E-Feld hinter dem Polarisator gilt also:

$$\vec{E}' = (\vec{E}\cdot\vec{P})\vec{P}$$

Aufgabe 4 *Brechung und Reflexionskoeffizienten bei schiefem Einfall*

In der xy- Ebene befinde sich eine Grenzfläche zwischen Luft und einem Medium. Eine ebene Welle mit Polarisation in Richtung der Einfallsebene (y=0) falle auf die Grenzfläche.
Berechnen sie die Transmission- und Reflexionsfkoeffizienten
Lösungsvorschlag:

Aus den Stetigkeitsbedingungen folgt für die hier getroffene Wahl der E-Felder (siehe Zeichnung letzte Seite):

$$-E_{0e}\sin\alpha_e + E_{0r}\sin\alpha_r = \epsilon_m(-E_{0t}\sin\beta$$

$$E_{0e}\cos\alpha_e + E_{0r}\cos\alpha_r = E_{0t}\cos\beta$$

Die Wahl der Richtung der E-Felder ist dabei willkürlich. Wählt man z.B $\vec{E}_r$ in die andere Richtung, so erhält man für die Abhängigkeit von E_e das gleiche Ergebniss mit einem anderen Vorzeichen. R und T werden davon nicht beeinflusst. Die Stetigkeitsbedingungen für das B-Feld liefern keine neuen Gleichungen. Die Richtung von B ist allerdings durch die Wahl der Richtungen von E und k ***eindeutig!*** *festgelegt.*
nun ist noch $\alpha_r = \alpha_e$ und $\sin\beta/\sin\alpha_e = 1/n_m$. Damit wird die erste Gleichung zu:

$$E_{0e} - E_{0r} = \kappa E_{0t}$$

mit

$$\kappa = \frac{\epsilon_m}{n_m}$$

Die zweite Gleichung wird zu

$$E_{0e} + E_{0r} = \alpha E_{0t}$$

mit

$$\gamma = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha_e}$$

auflösen ergibt

$$E_{0r} = \left(\frac{\gamma - \kappa}{\gamma + \kappa}\right) E_{0e} \qquad E_{0t} = \frac{2}{\gamma + \kappa} E_{0e}$$

Die Reflexions bzz Transmissionskoeffizienten sind also:

$$R = \left(\frac{\gamma - \kappa}{\gamma + \kappa}\right)^2 \qquad T = \frac{4\kappa}{(\gamma + \kappa)^2}$$

Aufgabe 5 $\lambda/4$ *Plättchen*

Ein Medium besitze in x-Richtung einen Brechungsindex n_x, in y-Richtung sei dieser n_y ($n_x \neq n_y$). Die Grenzfläche befinde sich in der xy-Ebene. Welche Dicke muss das Medium haben, damit das Licht mach dem durchlaufen elliptisch (bei passendem Einfall zirkular) polarisiert ist? (Das Licht falle senkrecht ein, Reflexionen vernachlässigen und sei linear polarisiert)
Lösungsvorschlag:
Bei senkrechtem Einfall und Vernachlässigung der Reflexion ergibt sich aus den Stetigkeitsbedingungen

$$E_e^{\perp} = E_t^{\perp}$$

Die einfallende Welle ist gegeben durch:

$$\vec{E} = \begin{matrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ 0 \end{matrix} \exp(i(k_1 z - \omega t))$$

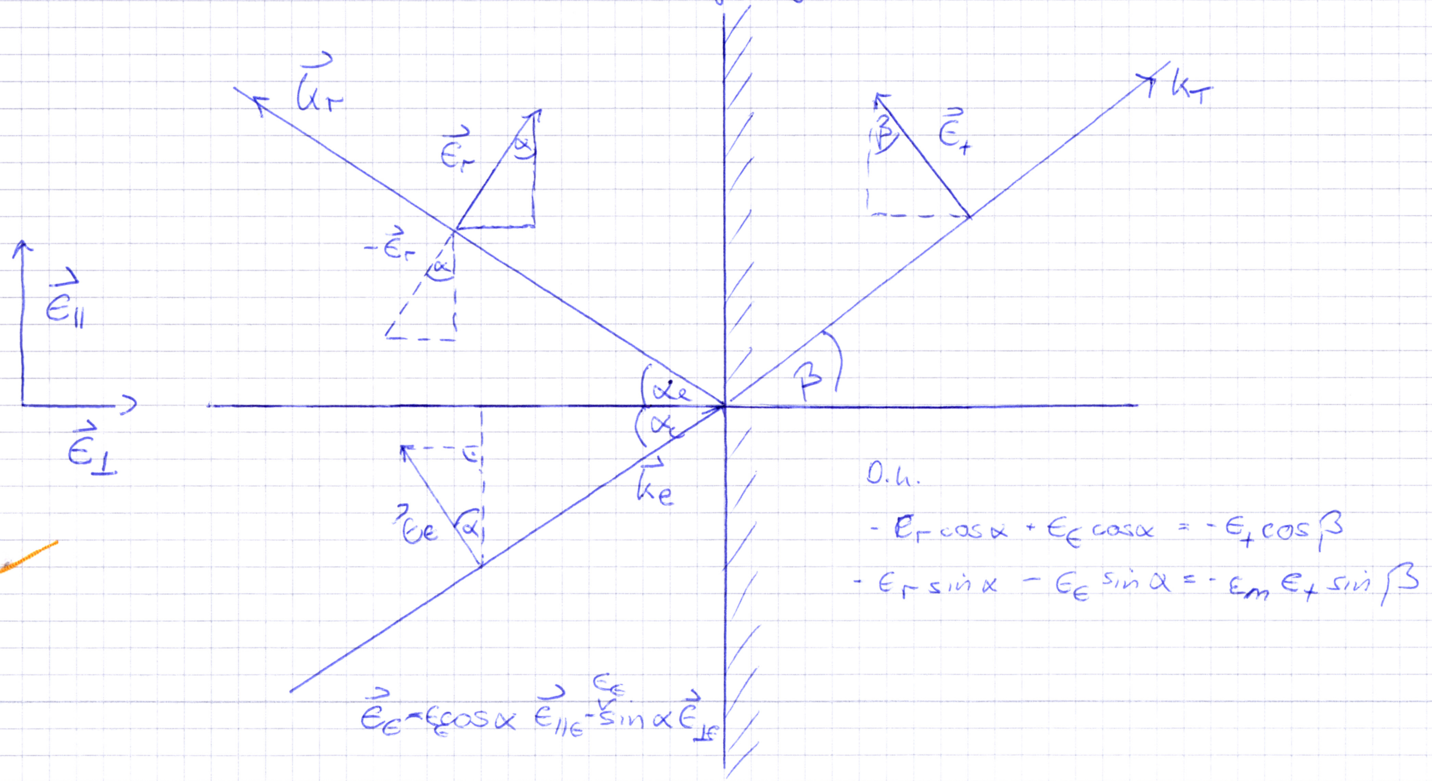
Da ω unabhängig vom Medium ist, hängt der Phasenunterschied nur von den unterschiedlichen k ab.

$$\Delta\phi = k_x d - k_y d = (k_x - k_y)d = \frac{\omega}{c_0} d(n_x - n_y) \overset{!}{=} \pi \qquad \Leftrightarrow \qquad d = \frac{\pi c_0}{\omega(n_x - n_y)}$$

Für zirkular polarisiertes Licht muss zusätzlich noch $E_{0x} = E_{0y}$ gelten.

$\vec{E}_r = E_r(-)\cos\alpha\,\vec{E}_{\parallel} + (-)E_r \sin\alpha\,\vec{E}_{\perp}$

$\vec{E}_t = E_t(-)\cos\beta\,\vec{E}_{\parallel} - E_t \sin\beta\,\vec{E}_{\perp}$



$\vec{E}_e = -E_e\cos\alpha\,\vec{E}_{\parallel e} - E_e\sin\alpha\,\vec{E}_{\perp e}$

d.h.

$-E_r\cos\alpha + E_e\cos\alpha = -E_t\cos\beta$

$-E_r\sin\alpha - E_e\sin\alpha = -\epsilon_m E_t \sin\beta$