Ferienkurs Elektrodynamik - Lösung

19. August 2009

1 Drehmomente I

Das Dipolfeld des Rings vereinfacht sich am Ort der quadratischen Schleife zu:

$$\vec{B}_R = \frac{\mu_0}{4\pi}[\frac{3(\vec{\mu_R}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{\mu_R}}{r^3}] = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mu_R}{r^3}\vec{e_z}$$

da $\vec{\mu_R}$ und $\vec{r}$ senkrecht aufeinander stehen und somit das Skalarprodukt $\vec{\mu_R}\cdot\vec{r} = 0$ ergibt.

Die Formel für das Drehmoment auf einen Dipol lautet:

$$\vec{M} = \vec{\mu}\times\vec{B} = \vec{\mu_S}\times\vec{B_R} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mu_S\mu_R}{r^3}(\vec{e_y}\times\vec{e_z}) = -\frac{\mu_0}{4}\frac{a^2b^2I^2}{r^3}\vec{e_x}$$

Wobei für für den Dipol des Rings $\mu_R = a^2\pi I\cdot\vec{e_y}$ und für den der Schleife $\mu_S = b^2I\cdot\vec{e_z}$ gilt.

2 Drehmomente II

Das Potential eines Dipols lautet:

$$\Phi_{dip} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\,r\,cos\theta}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\,cos\theta}{r^2} =$$

wobei θ der Winkel zwischen $\vec{r}$ und $\vec{p}$ ist.

Wendet man nun den angegebenen Gradienten auf das Potential an, erhält man das elektrische Feld eines Dipols:

$$\vec{E}_{dip} = -\vec{\nabla}\Phi = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0}(\frac{\delta}{\delta r}\frac{cos\theta}{r^2}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\delta}{\delta\theta}\frac{cos\theta}{r^2}\vec{e}_\theta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0\,r^3}(2cos\theta\vec{e}_r + sin\theta\vec{e}_\theta)$$

Für das Feld von p_1 am Ort vom Dipol p_2 ist $\theta = 90°$, wie man auf dem Bild in der Angabe sehen kann.

$$\vec{E}_{dip}(r, 90°) = \vec{E_1} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0\,r^3}\vec{e}_\theta$$

$$\vec{M} = \vec{p_2}\times\vec{E_1} = p_2(\vec{e}_r\times\vec{e}_\theta)E_1 sin\theta = p_2E_1 sin90°\vec{e}_\phi = \frac{p_1p_2}{4\pi\epsilon_0\,r^3}\vec{e}_\phi$$

3 Ohm

Das Feld zwischen den Zylindern ist nach Gauß:

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L\, r}\vec{e_r}$$

Damit erhält man schon den Strom zwischen den beiden Zylindern:

$$I = \int j\, dA = \sigma \int E\, dA = \frac{\sigma Q}{\epsilon_0}$$

Jetzt drücken wir die Ladung noch mit Hilfe der Spannung aus:

$$V = \int_a^b E\, dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} ln(b/a)$$

und erhalten somit für den Strom:

$$I = \frac{2\pi\sigma L}{ln(b/a}V$$

4 Induktion I

Der magnetische Fluss durch die Leiterschleife lautet:

$$\Phi(t) = B \cdot L_z \cdot cos(\omega t) L_x$$

Somit wird eine Spannung von

$$U(t) = -\frac{d}{dt}\Phi(t) = \omega B \cdot L_z L_x sin(\omega t)$$

induziert.

5 Induktion II

Wir versuchen das Problem mit Zylinderkoordinaten entlang der z-Achse zu lösen.
Bei der Anwendung des des Ampereschen Gesetzes ist die rechte Handregel sehr nützlich. Umschließen die Finger der rechten Hand den Leiter, so zeigt der Daumen in Richtung des positiven Stroms.
Für das Magnetfeld gilt:

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{\gamma} = B \oint d\gamma = B 2\pi r = \mu_0 \int \vec{j} \cdot d\vec{A} = \mu_0 I$$

Wobei wir wissen, dass das Magnetfeld aus Symmetriegründen in Richtung $\vec{e}_\phi$ zeigt. Dies ist auch der Grund, weshalb sich das Wegintegral vereinfacht.

Somit lautet das Magentfeld entlang des Drahtes:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\phi$$

Sei $x(t) = x_0 + ut$. Der magnetische Fluss durch die Schleife ist:

$$\Phi(t) = \int_{x(t)}^{x(t)+a} dx \int_{z_0}^{z_0+a} dz B(r) = \int_{x(t)}^{x(t)+a} dx \int_{z_0}^{z_0+a} dz \frac{\mu_0 I}{2\pi r} =$$

$$= \frac{\mu_0 I a}{2\pi} ln(\frac{x(t)+a}{x(t)})$$

Da sich die Schleife genau in Richtung $\vec{e_x}$ bewegt und auf der xz-Achse liegt, gilt x=r.
Die induzierte Spannung lautet:

$$U_{ind}(t) = -\frac{d}{dt}\Phi(t) = \frac{\mu_0 I a\, u}{2\pi}[\frac{1}{x_0 + ut} - \frac{1}{x_0 + a + ut}]$$

Das u der Geschwindigkeit kommt durch das Nachdifferenzieren in das Ergebnis.

6 Induktion III

Der magnetische Fluss durch den Ring ist:

$$\Phi(t) = \pi(\frac{a}{2})^2 B = \pi\frac{a^2}{4} B_0 cos(\omega t)$$

Die Spannung ist dann:

$$U = -\frac{d}{dt}\Phi(t) = \frac{\pi a^2 \omega B_0}{4} sin(\omega t)$$

Und der Strom:

$$I(t) = \frac{\pi a^2 \omega B_0}{4R} sin(\omega t)$$

7 Induktion IV

Die Lösung erhält man, indem man die Spannung berechnet. Einmal durch ein Wegintegral über $\vec{E}$ (Gleichung von links lesen) und einmal durch die Induktion (Gleichung von rechts lesen):

$$U = \int \vec{E}\, d\vec{\gamma} = E(2\pi s) = -\pi s^2 \frac{d}{dt}B(t) = -\frac{d}{dt}(\pi s^2 B(t)) = -\frac{d}{dt}\Phi = U$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{s}{2}\frac{d}{dt}B(t)\vec{e}_\phi$$

Wenn $\vec{B}$ stärker wird, geht $\vec{E}$ im Uhrzeigersinn, von oben betrachtet. Bei einer Abnahme des Magnetfeldes genau anders.

8 Maxwellgleichungen I

Die Kontinuitätsgleichung lautet:

$$\frac{\delta\rho}{\delta t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$$

Wir müssen also aus einer Maxwellgleichung den Term $\vec{\nabla}\cdot\vec{j}$ bekommen:

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{j} + \frac{\delta}{\delta t}\vec{D}$$

Die Divergenz davon lautet:

$$\underbrace{\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H})}_{=0} = \vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \frac{\delta}{\delta t}\underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{D})}_{\rho}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta\rho}{\delta t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$$

9 Maxwellgleichungen II

Im Vakuum ist $\rho = 0$ und $\vec{j} = 0$. Die beiden Maxwellgleichungen der Rotation werden dann zu:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\delta\vec{B}}{\delta t}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\delta\vec{E}}{\delta t}$$

Von der ersten angegebenen Gleichung wird die Rotation berechnet:

$$\underbrace{\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})}_{\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})-\Delta\vec{E}} = -\frac{\delta}{\delta t}\underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{B}}_{\mu_0\epsilon_0\frac{\delta\vec{E}}{\delta t}}$$

Die Divergenz von $\vec{E}$ wird 0, da wir uns im Vakuum befinden und hier die Ladungsdichte 0 ist.

$$\Rightarrow \Delta\vec{E} = \mu_0\epsilon_0\frac{\delta^2}{\delta t^2}\vec{E}$$

Völlig analog kommt man auf die Wellengleichung, wenn man von der zweiten angegebenen Wellengleichung die Rotation bildet.

10 Lenz

Der Magnet, der durch das Kupferrohr fällt, braucht natürlich länger. Aufgrund des fallenden Magneten spüren die Teile im Kupferrohr ein sich änderndes Magnetfeld, welches im Metall Wirbelströme erzeugt. Diese wiederrum erzeugen ein Magnetfeld, was nach der Lenzschen Regel der Ursache entgegenwirkt. Die Ursache ist die Bewegung des fallenden Magenten, der dadurch abgebremst wird und langsamer fällt.