# Ferienkurs Elektrodynamik - Lösung

18. August 2009

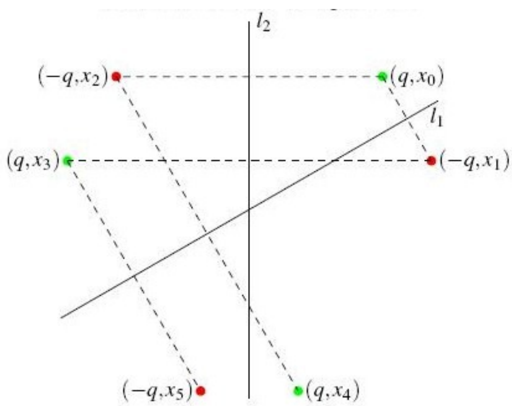
## 1 Gauß

Aus Symmetriegründen müssen die Flächennormale $\vec{n}$ und $\vec{E}$ parallel sein.

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{A} = 2A|\vec{E}| = \frac{A\sigma}{\epsilon_0} = \int \frac{\sigma}{\epsilon_0}\, dA$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{n}$$

## 2 Spiegelladung I




Wir beginnen mit der gegebenen Ladung q am Ort $\vec{x_0}$, also $(q, \vec{x_0})$ und spiegeln sie an der Ebene $l_1$ zu $(-q, \vec{x_1})$. Daraufhin ist das Potential an dieser Ebene 0. Nicht aber an der Ebene $l_2$.
Deswegen spiegeln wir die beiden Ladungen an der Ebene $l_2$ womit wir $(-q, \vec{x_2})$ und $(q, \vec{x_3})$ erhalten. Diese werden nochmals an $l_1$ gespiegelt und man bekommt $(q, \vec{x_4})$ und $(-q, \vec{x_5})$. Dabei ist $(q, \vec{x_4})$ exakt die Spiegelladung von $(q, \vec{x_5})$ an der Ebene $l_1$.

# 3 Spiegelladung II

a)

Das Problem wird in Polarkoordinaten betrachtet: $\vec{x} = (r\,cos\theta, r\,sin\theta)^T$
Sei die reelle Ladung $(q, \vec{a})$ und die Spiegelladung $(q_s, \vec{A})$. Damit erhält man für das Potential:

$$\Phi(\vec{x})\frac{1}{4\pi\epsilon_0}[\frac{q}{|\vec{x}-\vec{a}|}+\frac{q_s}{|\vec{x}-\vec{A}|}]$$

Diese Potential muss am Rand, also für r=R, gleich 0 sein. Dies muss zusätzlich für alle $\theta$ gelten:

$$\Phi(R,\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}[\frac{q}{|(R\,cos\theta, R\,sin\theta)^T-(a,0)^T|}+\frac{q_s}{|(R\,cos\theta, R\,sin\theta)^T-(A,0)^T|}] =$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}[\frac{q}{\sqrt{(R\,cos\theta-a)^2+(R\,sin\theta)^2}}+\frac{q_s}{\sqrt{(R\,cos\theta-A)^2+(R\,sin\theta)^2}}] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{q^2}{(R\,cos\theta-a)^2+(R\,sin\theta)^2} = \frac{q_s^2}{(R\,cos\theta-A)^2+(R\,sin\theta)^2}$$

Wie bereits erwähnt, muss diese Gleichung für alle $\theta$ gelten. Also insbesondere auch für $\theta = 0 \;\Rightarrow (sin\theta = 0,\; cos\theta = 1)$ und für $\theta = \pi/2 \;\Rightarrow (sin\theta = 1,\; cos\theta = 0)$
Damit erhält man folgende zwei Gleichungen:

$$\frac{q^2}{(R-a)^2} = \frac{q_s^2}{(R-A)^2}$$

$$\frac{q^2}{R^2+a^2} = \frac{q_s^2}{R^2+A^2}$$

$$\Rightarrow \frac{q^2}{q_s^2} = \frac{(R-a)^2}{(R-A)^2} = \frac{R^2+a^2}{R^2+A^2}$$

Aus der Gleichung

$$\frac{(R-a)^2}{(R-A)^2} = \frac{R^2+a^2}{R^2+A^2}$$

folgt eine quadratische Gleichung für A mit folgenden Lösungen:

$$A_1 = \frac{R^2}{a}$$

und

$$A_2 = a$$

Die zweite Lösung $A_2 = a$ kann man verwerfen, da es bedeuten würde, dass am selber Ort wie die reelle Ladung die Spiegelladung wäre, was natürlich

$\Phi(R) = 0$ bedeutet, aber uns bei unserem Problem nicht wirklich weiterhilft. Die Spiegelladung $q_s$ bekommt man mit:

$$\frac{q^2}{q_s^2} = \frac{R^2 + a^2}{R^2 + A^2} = \frac{a^2(R^2 + a^2)}{R^2(R^2 + a^2)}$$

$$\Rightarrow q_s = \pm\sqrt{q^2 \frac{R^2}{a^2}} = -q\frac{R}{a}$$

Bei obiger Wurzel kommt nur das negative Ergebnis in Frage, da die Spiegelladung ein anders Vorzeichen als q haben muss, sonst könnte man die Randbedingung nicht erfüllen.
Schließlich folgt für das Potential im Inneren des Rings:

$$\Phi(r,\theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}[\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2arcos\theta + a^2}} - \frac{R/a}{\sqrt{r^2 - 2r\frac{R^2}{a}cos\theta + R^4/a^2}}]$$

# 4 Polarisierbarkeit I

Mit der angegebenen Ladungsdichte ergibt sich für das elektrische Feld der Elektronenwolke:

$$\int E\,dA = \frac{k}{\epsilon_0}\int sin\theta\,d\Omega \int r^3\,dr = \frac{4\pi k}{\epsilon_0}\frac{r^4}{4}$$

$$\Rightarrow E = \frac{k}{4\epsilon_0}r^2$$

Wird nun ein externes Feld angelegt, stellt sich ein Gleichgewicht zwischen E und $E_{ext}$ ein, wobei das Elektron auf einen Abstand d vom Kern „weg gezogen “ wird.

$$E_{ext} = E$$

$$E_{ext} = \frac{k}{4\epsilon_0}d^2 = E$$

$$d = \sqrt{\frac{4\epsilon_0 E}{k}}$$

Mit der Definition des Dipolmoments p=ed erkennt man dann, dass

$$p = 2e\sqrt{\frac{\epsilon_0}{k}}\sqrt{E}$$

$E^{1/2}$ proportional zu p ist.

# 5 Polarisierbarkeit II

a)
Die beiden Ladungsdichten errechnen sich mit $\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ und $\sigma_P = \vec{P} \cdot \vec{n}$:

$$\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\frac{1}{r^2}\frac{\delta}{\delta r}(r^2\frac{k}{r}) = -\frac{k}{r^2}$$

$$\begin{aligned} \sigma_P &= \vec{P} \cdot \vec{n} = \\ \Rightarrow &= \vec{P} \cdot \vec{e_r} = \frac{k}{b} \; bei \; r = b \\ \Rightarrow &= -\vec{P} \cdot \vec{e_r} = -\frac{k}{a} \; bei \; r = a \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Gauß wissen wir, dass $\vec{E} = 0$ für $r < a$ und $r > b$ gilt.
Für den Bereich in der Kugelschale gilt:

$$Q_{in}(r) = \sigma_P A + \int d\Omega \int_a^r \rho_P r^2 dr = -\frac{k}{a}4\pi a^2 - 4\pi \int_a^r \frac{k}{r^2} r^2 dr = -4\pi ka - 4\pi k(r-a) = -4\pi kr$$

Vorsicht, wie man gleich bei Aufgabe b) sehen wird, spielt hier die Polarisation der Ladung auch eine Rolle.
Probe: Wenn man aber über die ganze Kugelschale intergriert, also Q(b) berechnet, kommt als Ergebnis 0 raus, was zeigt, dass eben keine freien Ladungsträger existieren.

$$Q_{in}(b) = \sigma_P A + \int sin\theta \, d\Omega \int_a^b \rho_P \, r^2 \, dr =$$

$$= -\frac{k}{a}4\pi a^2 + \frac{k}{b}4\pi b^2 - 4\pi \int_a^b \frac{k}{r^2} r^2 \, dr = -4\pi ka + 4\pi kb - 4\pi k(b-a) = 0$$

Für das elektrische Feld folgt dann noch:

$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{k}{\epsilon_0 r}\vec{e_r}$$

b)
Bei der Berechnung von $\vec{D}$ muss man hier sehr vorsichtig sein, da nur die eingeschlossene freie Ladung eine Rolle spielt.

$$\int D \, dA = Q_{frei} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{D} = 0$$

Dies gilt für alle r, da keine freien Ladungsträger vorhanden sind.
Im Bereich $a < r < b$ ist $\vec{P} \neq 0$. Hier gilt zusätzlich:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{1}{\epsilon_0}\vec{P} = -\frac{k}{\epsilon_0 r}\vec{e_r}$$

# 6 Kapazität I

a) Das Feld einer einzelnen geladenen Platte ist bereits aus der ersten Aufgabe bekannt. Zwischen den beiden Platten addieren sich nun die Felder, außerhalb der Platten heben sie sich auf.

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Es wird aber wieder die Spannung gesucht:

$$U = \int E \, dl = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}$$

Somit folgt für die Kapazität:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma A \epsilon_0}{\sigma d} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

b) Wir betrachten die die Anordnung als zwei einzelne Kondensatoren mit jeweiligem Plattenabstand d/2. Für den Kondensator ohne Dielektrika ist die Kapazität:

$$C = \frac{2\epsilon_0 A}{d}$$

Für den Kondensator mit Dielektrika wird noch $\vec{D}$ berrechnen:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \sigma$$

$$D = \frac{Q}{A} = \sigma = \epsilon\epsilon_0 E$$

deswegen gilt für die Spannung:

$$U = \int E dl = \frac{\sigma d}{\epsilon\epsilon_0}$$

Und für die Kapazität:

$$C = 2\epsilon\epsilon_0 \frac{A}{d}$$

Also folgt für die gesamte Anordnung:

$$C_{ges} = \frac{2\epsilon_0 \epsilon A}{d(1+\epsilon)}$$

# 7 Kapazität II

Um $\vec{E}$ im zwischen den beiden Hohlzylindern zu erhalten berrechnet man zuerst $\vec{D}$:

$$\int \vec{\nabla} \cdot \vec{D} \, dV = \int \vec{D} \, dA = Q$$

$$\Rightarrow D = \frac{q}{2\pi l r}$$

Die Spannung bekommt man mit:

$$U = \int E dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{D}{\epsilon \epsilon_0} dr = \frac{q}{2\pi l} \frac{1}{\epsilon \epsilon_0} ln(\frac{r_2}{r_1})$$

$$C = \frac{2\pi \epsilon \epsilon_0 l}{ln(\frac{r_2}{r_1})}$$