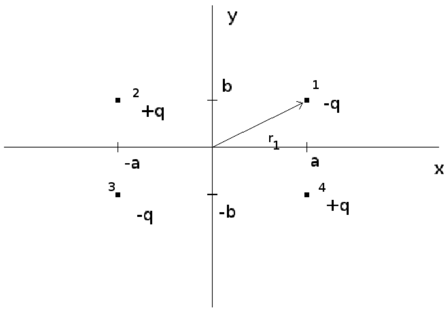
Aufgabe 1 *Multipolentwicklung*

Gegeben sei die folgende Ladungsverteilung:



Berechnen sie die Multipolentwicklung dieser Ladungsverteilung bis zur ersten nicht-verschwindenden Ordnung.
Lösungsvorschlag:
Der Vektor $\vec{r}_i$ bezeichne den Ortvektor zur Ladung q_i.
Die Ladungsveteilung ist gegeben durch

$$\rho(\vec{r}) = q\left[-\delta(\vec{r}-\vec{r}_1)+\delta(\vec{r}-\vec{r}_2)-\delta(\vec{r}-\vec{r}_3)+\delta(\vec{r}-\vec{r}_4)\right] = q\left[-\delta(\vec{r}-\vec{r}_1)+\delta(\vec{r}-\vec{r}_2)-\delta(\vec{r}+\vec{r}_1)+\delta(\vec{r}+\vec{r}_2)\right]$$

Hieraus lassen sich nun die Multipole berechnen. Zunächst der **Monopol**. Dieser ist gegeben durch:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho(\vec{r})d^3r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[-q+q-q+q\right] = 0$$

also nächstes der **Dipol**. Für diesen gilt:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\vec{r}\cdot\int \vec{r}'\rho(\vec{r}')d^3r' = 0$$

Da

$$\vec{p}_x = \int x\rho(\vec{r})d^3r = q\int d^3rx\left[-\delta(z)\delta(x-a)\delta(y-b)+...\right] = q\left[-(a)+(-a)-(-a)+(a)\right] = 0$$

analog $p_y = p_z = 0$
Nun fehlt nur noch der **Quadrupol**. Für dessen Komponenten gilt

$$Q_{ij} = \int d^3r(3x_ix_j - \delta_{ij}r^2)\rho(\vec{r})$$

Nebenrechnung:

$$\int d^3rx^2\rho(\vec{r}) = q\left[-a^2+a^2-a^2+a^2\right] = 0 = \int d^3ry^2\rho(\vec{r}) = \int d^3rz^2\rho(\vec{r})$$

Hieraus folgt:

$$Q_{xx} = \int d^3r(3x^2-r^2)\rho(\vec{r}) = \int d^3r3x^2-(x^2+y^2+z^2)\rho(\vec{r}) = 0 = Q_{yy} = Q_{zz}$$

Nun fehlen nur noch die gemischten Terme. Dabei ist

$$Q_{zx} = Q_{xz} = Q_{zy} = Q_{yz} = 0$$

da

$$\int dz\delta(z) = 0$$

$$Q_{xy} = Q_{yx} = \int d^3r3xy\rho(\vec{r}) = q\int d^3r3xy\left[-\delta(z)\delta(x-a)\delta(y-b)+...\right] = 3q[-ab+(-ab)-(-a\cdot-b)+(a\cdot-b)] = -12ab$$

Das heißt

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{-24abq}{8\pi\epsilon_0 r^5}$$

Aufgabe 2 *Potential und Vektorpotential*

a) Gegeben sei ein elektrisches Feld $\vec{E}(\vec{r}) = (2xyz, x^2z, x^2y)^T$. Bestimmen sie ein zugehöriges Potential.
Lösungsvorschlag:

$$\phi(\vec{r}) = -x^2yz + const$$

b) Gegeben sei ein Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r}) = -(1,0,x)^T$. Bestimmen sie ein zugehöriges Vektorpotential.
Lösungsvorschlag:
z.B:

$$\vec{A}(\vec{r}) = (xy, z, 0)^T + \vec{\nabla}f(\vec{r})$$

Aufgabe 3 *Kraft auf bewegten Platte*

Betrachten sie eine Metallplatte mit Breite b und Länge l die eine Oberflächenladungsdichte der Form $\sigma = Q\cos\left(\frac{x}{b}\pi\right)\cos\left(\frac{y}{l}\pi\right)$ trägt. Zur Zeit $t = 0$ befinde sich der Mittelpunkt der Plate bei $\vec{r} \equiv 0$. Diese erfährt nun eine Beschleunigung $\vec{a} = a\hat{e}_v$. Berechnen sie die Kraft, die ein Magnetfeld $B = B_0\hat{e}_z$ auf die Platte ausübt. Diese bewege sich während der ganzen Zeit nur in y-Richtung *Lösungsvorschlag*:
Zur Zeit $t = 0$ lautet die Ladungsdichte:

$$\rho(\vec{r}, t) = Q\delta(z)\cos\left(\frac{x}{b}\pi\right)\cos\left(\frac{y}{l}\pi\right)\Theta\left(\frac{b}{2}-|x|\right)\Theta\left(\frac{l}{2}-|y|\right)$$

Dabei ist $\Theta(x)$ die Heaviside-Funktion mit den Eigenschaften:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

Diese sorgt dafür, dass sich nur auf der Platte eine von Null verschiedene Ladung befindet. Zur Zeit $t > 0$ ist die Platte um die Strecke $\Delta y = \frac{1}{2}at^2$ in y-Richtung "weitergewandert". Die Ladungsdichte lautet dann

$$\rho(\vec{r}, t) = Q\delta(z)\cos\left(\frac{x}{b}\pi\right)\cos\left(\frac{y-\Delta y}{l}\pi\right)\Theta\left(\frac{b}{2}-|x|\right)\Theta\left(-y-\frac{l}{2}+\Delta y\right)\Theta\left(y-\frac{l}{2}-\Delta y\right)$$

Multiplikation mit $\vec{v}$ liefert die Stromdichte $\vec{j}(\vec{r}, t)$:

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = Q\delta(z)\cos\left(\frac{x}{b}\pi\right)\cos\left(\frac{y-\Delta y}{l}\pi\right)\Theta\left(\frac{b}{2}-|x|\right)\Theta\left(-y-\frac{l}{2}+\Delta y\right)\Theta\left(y-\frac{l}{2}-\Delta y\right)v(t)\hat{e}_y$$

Nun lässt sich die auf die Platte wirkende Kraft leicht berechnen:

$$dF = \vec{j}(\vec{r})d^3r \times \vec{B} = jd^3r\hat{e}_y \times B_0\hat{e}_z = B_0jd^3r\hat{e}_x$$

Integration über den ganzen Raum liefert:

$$F = \int d^3rB_0j\hat{e}_x =$$

$$= \hat{e}_xB_0Qv(t)\int dz\delta(z)\int dx\cos\left(\frac{x}{b}\pi\right)\Theta\left(\frac{b}{2}-|x|\right)\int dy\cos\left(\frac{y-\Delta y}{l}\pi\right)\Theta\left(-y-\frac{l}{2}+\Delta y\right)\Theta\left(y-\frac{l}{2}-\Delta y\right) =$$

$$= \hat{e}_xB_0Qv(t)\cdot 1\int_{-b/2}^{b/2} dx\cos\left(\frac{x}{b}\pi\right)\int_{-l/2+\Delta y}^{l/2+\Delta y} dy\cos\left(\frac{y-\Delta y}{l}\pi\right) = \hat{e}_xB_0Qv(t)\frac{4bl}{\pi^2} = \frac{4bl}{\pi^2}B_0Qat\hat{e}_x$$

Aufgabe 4 *Potentialberechnung mittels Kugelflächenfunktionen*

Gegeben sei eine Kugel mit Radius R. Diese trage eine Ladungsdichte $\rho(\vec{r}) = qf(r)\sin\vartheta\sin\varphi$. Berechnen sie $\phi(\vec{r})$ außerhalb dieser .
Hinweis: Die ersten paar Kugelflächenfunktionen lauten:

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \qquad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta, \qquad Y_{1\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\vartheta\exp(\pm i\varphi)$$

Lösungsvorschlag:
Für den Sinus gilt:

$$sin(x) = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i}$$

Damit folgt

$$\rho(\vec{r}) = Cf(r)Y_{11} + Y_{1-1}, \qquad C = -2i\sqrt{\frac{8\pi}{3}}$$

C bezeichne die gesammelten konstanten Vorfaktoren. Die sphärischen Multipolmomente Lassen sich nun berechnen.

$$q_{lm} = a_{lm}\int d^3r'\rho(\vec{r}')r'^{l}Y^*_{lm}(\theta',\varphi') = \begin{cases} C'\int\limits_0^R r^3 f(r)dr & l=1, m=1 \\ C'\int\limits_0^R r^3 f(r)dr & l=1, m=-1 \\ 0 & \textbf{sonst} \end{cases}$$

mit

$$C' = -\sqrt{\frac{4\pi}{3}}2i\sqrt{\frac{8\pi}{3}}$$

Das Potential ist also gegeben durch

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_0^R r'^3 f(r)dr' C'\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\frac{(Y_{11}+Y_{1-1})}{r^2} = \frac{1}{3\epsilon_0}\int\limits_0^R r'^3 f(r)dr'\sin\vartheta\sin\varphi$$

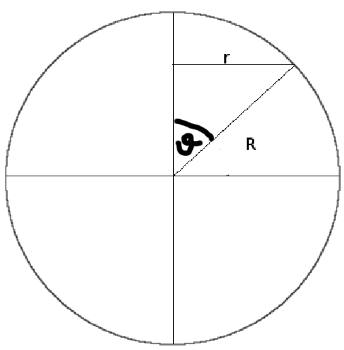
Aufgabe 5 *Magnetfeld einer rotierenden Kugel*

Betrachten sie eine Hohlkugel Radius R, die auf der Oberfläche gleichmäßig mit der Ladung Q geladen ist. Die Kugel rotiere um eine Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$

a) Bestimmen sie die zugehörige Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$.
Lösungsvorschlag
Die Achse um die rotiert wird, sei die z-Achse. dann ist $\vec{\omega} = \omega\hat{e}_z$. Zudem ist die Ladungsdichte gegeben durch $\rho(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi R^2}\delta(r-R)$ um daraus die Stromdichte zu erhalten muss man $\rho\vec{v}$ bestimmen. Dazu gibt es mehrere Möglichkeiten
Weg I:

$$\vec{j}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})\vec{v} = \rho(\vec{r})(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \rho(\vec{r})R\omega(\hat{e}_z\times\hat{e}_r) = \frac{Q\omega}{4\pi R}\sin\vartheta\delta(r-R)\hat{e}_\varphi$$

Weg II:



Man überlegt sich wie groß die Geschwindigkeit eines Punktes auf der rotierenden Kugel ist. Dieser läuft auf Kreisbahnen mit Radius r. Die Geschwindigkeit ist dann

$$v(r) = \omega r$$

r enspricht der Länge der Projektion des Vektors $\vec{r}$ auf die $x - y$-Ebene. Dieser ist bei einer Kugel

$$r = \sin\vartheta R$$

. Die Geschwindigkeit ist also $v(\vartheta) = \omega R \sin(\vartheta)$. Die Rotation erfolgt um die z-Achse also ist die Richtung von v $\hat{e}_{varphi}$
Zusammengesetzt folgt

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{Q\omega}{4\pi R} \sin\vartheta \delta(r - R)\hat{e}_\varphi$$

b) Berechnen sie das von $\vec{j}(\vec{r})$ verursachte Dipolmoment $\vec{\mu}$. *Lösungsvorschlag*:
Das magnetische Dipolmoment kann über

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} \int d^3r \; \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})$$

berechnet werden.

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2}\frac{Q\omega}{4\pi R} \int d^3r \; r \underbrace{\hat{e}_r \times \hat{e}_\varphi}_{=-\hat{e}_\vartheta} \sin\vartheta\delta(r - R) = \frac{Q\omega}{8\pi R} \int drr^3\delta(r - R) \int d\Omega \sin\vartheta \begin{pmatrix} -\cos\vartheta \cdot \cos\varphi \\ -\cos\vartheta \cdot \sin\varphi \\ +\sin\vartheta \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{Q\omega R^2}{8\pi} \int d\vartheta \sin^2\vartheta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\pi\sin\vartheta \end{pmatrix} = \frac{Q\omega R^2}{4} \int\limits_0^\pi d\vartheta \sin^3\vartheta \hat{e}_z = \frac{Q\omega R^2}{4}\hat{e}_z \left(-\frac{1}{3} sin^2(\vartheta)\cos(\vartheta) - \frac{2}{3}\cos(\vartheta)\Big|_{\vartheta=0}^{\pi} \right) =$$

$$= \frac{Q\omega R^2}{3}\hat{e}_z = \frac{QR^2}{3}\vec{\omega}$$

c) Berechnen sie $\vec{A}(\vec{r})$.

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{\mu} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{QR^2\mu_0}{12\pi r^3}(\vec{\omega} \times \vec{r})$$