

Michael Schrapp, Matthias Eibl

Ferienkurs *Theoretische Mechanik 2009*

Probeklausur

1 Kurze Fragen

1. Wann ist ein Kraftfeld konservativ? Geben Sie drei äquivalente Bedingungen!

Lösung

- Es existiert eine Funktion $U(r)$ mit:

$$\vec{F}(r) = -\vec{\nabla}U(r)$$

- Für jede geschlossene Kurve γ gilt:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

- \vec{F} ist einfach wegzusammenhängendes Kraftfeld, d.h. Feld ohne Löcher, dann gilt:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$

2. Zeigen Sie, dass im Zentralpotential $U(r)$ der Drehimpuls erhalten ist. Welche andere Größe ist erhalten?

Lösung

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{l} = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = m(\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}) + \vec{r} \times (m\ddot{\vec{r}}) = 0 + \vec{r} \times \vec{F}$$

Im Zentralpotential gilt: $\vec{F} = -\vec{\nabla}U(r) = \frac{d}{dr}U(r)\vec{e}_r \Rightarrow \vec{r} \times \vec{F} = -r \frac{d}{dr}U(r)(\vec{e}_r \times \vec{e}_r) = 0$

damit folgt: $\frac{d}{dt}\vec{l} = 0$

Eine weitere Erhaltungsgröße stellt die Gesamtenergie E dar.

3. Zeigen Sie für eine eindimensionale Bewegung im Potential $U(x)$, dass die Euler-Lagrangegleichung gerade die Newtonsche Bewegungsgleichung ergibt.

Lösung

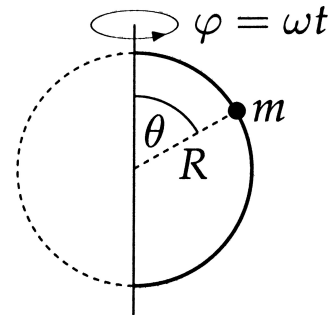
$$T = \frac{m}{2}\dot{x}^2 \quad U = U(x)$$

$$L = T - U = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - U(x)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \Rightarrow -\frac{\partial U}{\partial x} = m\ddot{x} \equiv F_x$$

2 Rotierender Draht

Ein Teilchen sei auf einem halbkreisförmig rotierenden Draht angebracht und auf diesem frei beweglich. Der Draht rotiere mit konstantem ω um die fest vorgegebene Achse im kräftefreien Raum.



i.) Stellen Sie die Lagrangefunktion \mathcal{L} auf.

Lösung:

Die Lagrange-Funktion für ein freies Teilchen in Kugelkoordinaten lautet

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2(\vartheta) \dot{\varphi}^2 \right)$$

Zwangsbedingungen einsetzen:

$$\begin{aligned} r &= R, & \varphi &= \omega t \\ \Rightarrow \mathcal{L} &= \frac{1}{2}m \left(R^2 \dot{\vartheta}^2 + R^2 \sin^2(\vartheta) \omega^2 \right) \end{aligned}$$

ii.) Berechnen Sie damit die Hamiltonfunktion \mathcal{H} und stellen Sie die kanonischen Gleichungen auf.

Lösung:

Bei der Hamilton-Funktion beachte man, dass es nur einen Freiheitsgrad gibt. Zuerst den kanonischen Impuls ausrechnen:

$$p_{\vartheta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} = mR^2 \dot{\vartheta}$$

Jetzt nach der Geschwindigkeit auflösen:

$$\dot{\vartheta} = \frac{p_{\vartheta}}{mR^2}$$

dann die Hamilton-Funktion bestimmen und die Geschwindigkeit durch den kanonischen Impuls eliminieren:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= p_{\vartheta} \dot{\vartheta} - \mathcal{L} \\ &= \frac{p_{\vartheta}^2}{mR^2} - \frac{1}{2}m \left(R^2 \dot{\vartheta}^2 + R^2 \sin^2(\vartheta) \omega^2 \right) \\ &= \frac{p_{\vartheta}^2}{2mR^2} - \frac{1}{2}mR^2 \sin^2(\vartheta) \omega^2 \end{aligned}$$

Jetzt die kanonischen Gleichungen berechnen und zu einer einzigen Bewegungsgleichung zusammenführen:

$$\begin{aligned} \dot{p}_{\vartheta} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vartheta} = mR^2 \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \omega^2 \\ \dot{\vartheta} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{\vartheta}} = \frac{p_{\vartheta}}{mR^2} \\ \Rightarrow \ddot{\vartheta} - \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \omega^2 &= 0 \end{aligned}$$

Das ist die DGL für ϑ .

iii.) Bestimmen Sie die Gesamtenergie E und berechne $\frac{dE}{dt}$. Was ist dafür die physikalische Begründung?

Lösung:

Da $\mathcal{L} = T = E$, weil $V = 0$ ist, folgt:

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \frac{d\mathcal{L}}{dt} = m \left(R^2 \dot{\vartheta} \ddot{\vartheta} + R^2 \dot{\vartheta} \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \omega^2 \right) \\ &= m R^2 \dot{\vartheta} \underbrace{\left(\ddot{\vartheta} + \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \omega^2 \right)}_{\neq 0} \\ &\neq 0\end{aligned}$$

Das folgt aus der Bewegungsgleichung für ϑ (Man beachte das Plus!). Die physikalische Begründung ist natürlich, dass die Zwangsbedingung zeitabhängig ist (der Draht dreht sich ständig) und somit dem System Energie zu- und abgeführt werden kann.

iv.) Berechnen Sie $\frac{d\mathcal{H}}{dt}$ und vergleichen Sie \mathcal{H} mit der Energie.

Lösung:

Die totale Zeitableitung der Hamilton-Funktion ist gleich ihrer partiellen:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{H}}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0 \\ \text{andererseits:} &= \frac{p_\vartheta \dot{p}_\vartheta}{mR^2} - \dot{\vartheta} m R^2 \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \omega^2 \\ &= \frac{p_\vartheta \dot{p}_\vartheta}{mR^2} - \frac{p_\vartheta \dot{p}_\vartheta}{mR^2} \\ &= 0\end{aligned}$$

Die Hamilton-Funktion ist also erhalten, die Energie aber nicht! Daraus folgt sofort:

$$\mathcal{H} \neq E$$

3 kanonische Transformationen

Überprüfen sie, ob die folgenden Transformationen kanonisch sind.

- $\tilde{q} = pq - q^3$
 $\tilde{p} = p^2 + \frac{p}{q}$
- $\tilde{q} = \arctan\left(\frac{q}{p}\right)$
 $\tilde{p} = \frac{1}{2}(q^2 + p^2)$

Lösung:

- $\tilde{q} = pq - q^3$
 $\tilde{p} = p^2 + \frac{p}{q}$

ist **keine** kanonische Transformation. Dies sieht man am besten, indem man die Poisson-Klammer

$$\{\tilde{q}, \tilde{p}\}_{q,p} = \sum_i \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial q_i} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p_i} - \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p_i} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q_i} \right)$$

berechnet.

Führt man die partiellen Ableitungen aus, so kommt ein Ausdruck ungleich 1 heraus.

$$2. \quad \tilde{q} = \arctan\left(\frac{q}{p}\right) \\ \tilde{p} = \frac{1}{2}(q^2 + p^2)$$

Ist hingegen eine kanonische Transformation, Nachweis analog wie oben.

Wählen Sie **eine** der nächsten beiden Aufgaben (4 oder 5) zur Bearbeitung aus!

4 Würfelpendel

Ein homogener Würfel der Kantenlänge s und der Masse M hänge vertikal von einer seiner Kanten herab. Außer der Gravitationskraft wirken keine Kräfte. Finden Sie die Periode für kleine Schwingungen um die Gleichgewichtslage.

Wie groß ist die Länge eines äquivalenten Fadenpendels?

Lösung

Zunächst machen wir uns qualitative Überlegungen zu diesem Problem.

Der Würfel ist fest aufgehängt. In seinem Schwerpunkt greift die Gewichtskraft an. Ist der Würfel ausgelenkt, erfährt er ein Drehmoment, das ihn in Richtung der Ruhelage bewegt. Dabei ist nur die Komponente der Gewichtskraft von Bedeutung, die senkrecht zum Radius steht, da der Würfel durch die feste Aufhängung sich radial nicht bewegen kann.

Wir müssen das Drehmoment bestimmen und können dann über die Änderung des Drehimpulses die Bewegungsgleichung für den Würfel aufstellen: Für die senkrechte Komponente der Gewichtskraft, die auf den Würfel wirkt gilt in Abhängigkeit der Auslenkung φ :

$$F_{\perp} = -F_G \sin \varphi, \quad F_G = Mg$$

Diese Kraft erzeugt am Ort des Schwerpunktes ein Drehmoment. Der Schwerpunkt hat den Abstand a zur Drehachse. Für diesen erhalten wir nach geometrischer Überlegung:

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2}s$$

Damit erhalten wir für das Drehmoment und somit der Drehimpulsänderung:

$$F_{\perp} a = I\ddot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad -Mga \sin \varphi = I\ddot{\varphi}$$

Mit Kleinwinkelnäherung $\sin \varphi \approx \varphi$ ergibt sich die Bewegungsgleichung:

$$-Mga\varphi = I\ddot{\varphi} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\varphi} + \frac{Mga}{I}\varphi = 0$$

Nun benötigen wir noch das Trägheitsmoment des Würfels bezüglich der Rotationsachse um die entgeltige Bewegungsgleichung aufstellen zu können.

Dafür legen wir die Kante an der der Würfel aufgehängt ist in die z -Achse und zwei Kanten weitere in die x - bzw. y -Achse. Somit erhalten wir für die zz -Komponente des Trägheitstensors folgenden Ausdruck:

$$I_{33} = I_{zz} := I = \rho \int_0^s dx \int_0^s dy \int_0^s dz (x^2 + y^2) = \frac{2}{3}\rho s^5 = \frac{2}{3}Ms^2$$

Somit erhalten wir die Bewegungsgleichung anhand der man die Schwingungsfrequenz ω ablesen kann und somit die Periodendauer T bestimmen kann:

$$\ddot{\varphi} + \frac{3\sqrt{2}g}{4}\frac{\varphi}{s} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}g}{4}\frac{g}{s}} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi s \sqrt{\frac{4}{3\sqrt{2}g}} = 2\pi \sqrt[4]{\frac{2s}{3g}}$$

Die Länge eines Fadenpendels mit der gleichen Schwingungsdauer errechnet sich über diese Gleichung:

$$T = T' = 2\pi\sqrt{l/g} \quad \Rightarrow \quad 2\pi\sqrt[4]{2}\sqrt{\frac{2s}{3g}} = 2\pi\sqrt{l/g} \quad \Rightarrow \quad l = \frac{2}{3}\sqrt{2}s$$

5 Abrollende Zylinder

Zwei homogene Zylinder mit den Massen m_1, m_2 und den Radien r_1, r_2 sind mit einem Faden umwickelt. Die Achse des Zylinders 1 ist reibungsfrei horizontal gelagert. Der Zylinder 2 fällt im Schwerfeld senkrecht nach unten, wobei sich der Faden von beiden Zylindern abwickelt.

Für die Beschleunigung des fallenden Zylinders gibt es eine Zwangsbedingung. Wie lautet diese?

Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf und berechnen Sie die Fadenspannung.

Nutzen Sie dabei aus, dass die Änderung des Drehimpulses gerade dem angelegten Drehmoment entspricht.

Lösung

F bezeichne die Fadenspannung die auf jeden der beiden Zylinder ein Drehmoment erzeugt. Für die Drehimpulsänderung ergibt sich damit:

$$\dot{L}_1 = I_1\dot{\omega}_1 = r_1F \quad \text{und analog} \quad \dot{L}_2 = I_2\dot{\omega}_2 = r_2F$$

Für das Trägheitsmoment eines homogenen Vollzylinders bezüglich seiner Symmetrieachse finden wir:

$$I_{33} = \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz \int_0^r dr' r' (x^2 + y^2) = \rho 2\pi h \int_0^r dr' r'^2 = \frac{m}{2} r^2$$

Somit lauten obige Gleichungen:

$$\begin{aligned} r_1F &= \frac{m_1}{2} r_1^2 \dot{\omega}_1 & r_2F &= \frac{m_2}{2} r_2^2 \dot{\omega}_2 \\ F &= \frac{m_1}{2} r_1 \dot{\omega}_1 = \frac{m_2}{2} r_2 \dot{\omega}_2 & \Leftrightarrow 2F &= m_1 r_1 \dot{\omega}_1 = m_2 r_2 \dot{\omega}_2 \end{aligned}$$

Für die Kraft auf den fallenden Zylinder ergibt sich:

$$m_2 \ddot{x}_2 = m_2 g - F$$

Die Beschleunigung dieses Zylinders erhalten wir aus der Zwangsbedingung:

$$\ddot{x}_2 = r_1 \dot{\omega}_1 + r_2 \dot{\omega}_2$$

Somit haben wir drei Gleichung mit drei Unbekannten $\dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2, \ddot{x}_2$:

$$2F = m_1 r_1 \dot{\omega}_1 = m_2 r_2 \dot{\omega}_2 \tag{1}$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = m_2 g - F \tag{2}$$

$$\ddot{x}_2 = r_1 \dot{\omega}_1 + r_2 \dot{\omega}_2 \tag{3}$$

Diese können wir folgendermaßen umstellen und somit die Fadenspannung F berechnen:

$$\begin{aligned} 3 \text{ in } 2 \text{ eingesetzt: } & m_2(r_1 \dot{\omega}_1 + r_2 \dot{\omega}_2) = m_2 g - F \quad | \cdot m_1 (m_2 r_2 \dot{\omega}_2 = 2F) \\ & \Rightarrow m_2 r_1 \dot{\omega}_1 m_1 + 2F m_1 = m_1 m_2 g - F m_1 \quad | (m_2 r_2 \dot{\omega}_2 = 2F) \\ & \Rightarrow m_2 2F + 3F m_1 = m_1 m_2 g \quad \Rightarrow F = \frac{m_1 m_2}{3m_1 + 2m_2} g \end{aligned}$$