Ferienkurs Mechanik: Probeklausur

Simon Filser

25.9.09

1 Kurze Fragen

Geben Sie möglichst kurze Antworten auf folgende Fragen:

a) Ein Zug fährt mit konstanter Geschwindigkeit genau von Norden nach Süden. In welche Richtung (im Bezugssystem des Zuges) wirkt die Corioliskraft, wenn er gerade den Äquator passiert?

Lösung: Da der Zug beim Passieren des Äquators in Richtung der Rotationsachse fährt, wirkt keine Corioliskraft

$$\vec{F}_c = -2m\vec{\omega} \times \vec{v} = 0 \tag{1}$$

b) Betrachten Sie ein lineares 4-atomiges Molekül, das der Zwangsbedingung unterliegt, dass alle Atome auf einer 2-dimensionalen Oberfläche liegen. Das Molekül wird als ein System aus vier Massenpunkten beschrieben, die untereinander mit Hookeschen Federn verbunden sind. Wieviele unabhängige Eigenschwingungen hat dieses System?

Lösung: Im zweidimensionalen System hat jedes der 4 Moleküle je 2 Freiheitsgrade, also insgesamt 8. Davon entfallen 2 auf die Translation und 1 auf die Rotation. Also bleiben 5 unabhängige Eigenschwingungen.

c) Ist die Transformation $P = \frac{q^2}{2} sin(p), \quad Q = \frac{q^2}{2} cos(p)$ kanonisch?

Lösung: Wir überprüfen mit der Poissonklammer

$$\{Q, P\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = q cos(p)\frac{q^2}{2}cos(p) - \frac{q^2}{2}(-sin(p)) q sin(p) = \frac{q^3}{2} \neq 1 \tag{2}$$

Die Transformation ist also nicht kanonisch.

d) Ein Massenpunkt bewegt sich im elektrischen Potenzial einer unendlich ausgedehnten homogenen Flächenladungsverteilung (auf der x-y-Ebene). Welche Größen sind erhalten?

Lösung: Wegen der Symmetrie sind die Impulse in x- und y-Richtung sowie die Drehimpuls um die z-Achse und die Gesamtenergie (nur konservative Kräfte) erhalten.

e) Warum ist ein eindimensionales, ausschließlich ortsabhängiges und hinreichend glattes Kraftfeld immer konservativ?

Lösung: Ein Kraftfeld ist konservativ, falls ein Potenzial existiert. Im eindimensionalen Fall ist das trivial:

$$U(x) = -\int^{x} F(x')dx' \tag{3}$$

2 Phasenraum: Kepler-Potenzial

Wir betrachten einen Massenpunkt, der sich in einem eindimensionalen Kepler-Potenzial $U = -\frac{c}{|q|},\ c > 0$ bewegt.
a) Stellen Sie die Hamiltonfunktion auf

Lösung: In diesem einfachen Beispiel entspricht die Hamiltonfunktion der Energie: $\mathcal{H} = E = \frac{p^2}{2m} - \frac{c}{|q|}$

b) Zeichnen Sie das Phasenraumportrait für $E = 0$, $E < 0$, $E > 0$

Lösung: Wir lösen die Gleichung nach p auf, damit wir den Graphen zeichnen können:

$$p(q) = \sqrt{2m(E + \frac{c}{|q|})} \tag{4}$$

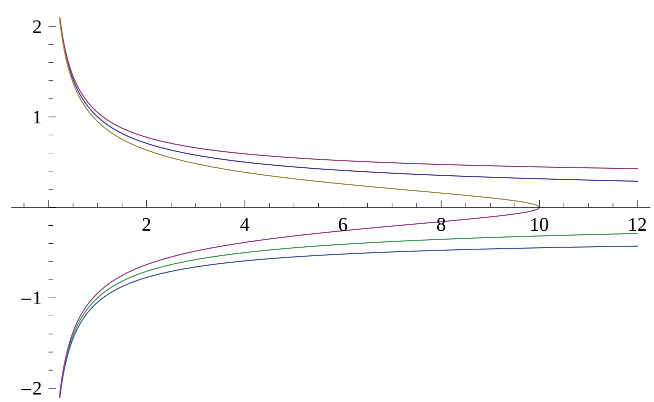

Abbildung 1: Phasenraumportrait für das Keplerpotenzial

3 Lagrange-Mechanik: Stehendes Pendel

Ein ebenes Pendel mit einer masselosen Stange der Länge R ist stehend am unteren Ende befestigt. Am oberen Ende befindet sich ein Massepunkt mit Masse m, auf den die Schwerkraft in die negative z-Richtung wirkt. Dieser Massepunkt ist nach oben hin mit einer masselosen idealen Feder befestigt (siehe Skizze). In der vertikalen Lage des Pendels ($\phi = 0$) hat die Feder ihre Ruhelänge L, ist also entspannt. Stellen Sie mit dem Lagrangeformalismus die Bewegungsgleichung für die Koordinate ϕ auf (Schwerkraft nicht vergessen!). Verwenden Sie dabei die Formel für die potentielle Energie der Feder, $U(l) = \frac{k(L-l)^2}{2}$, bei Ausdehnung/Zusammendrücken auf die Länge l. Die Bewegungsgleichung muss nicht gelöst werden (das heißt, das Ergebnis muss nicht schön sein). *Hinweise:* Kosinussatz: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, Sinussatz: $\frac{a}{b} = \frac{sin\alpha}{sin\beta}$

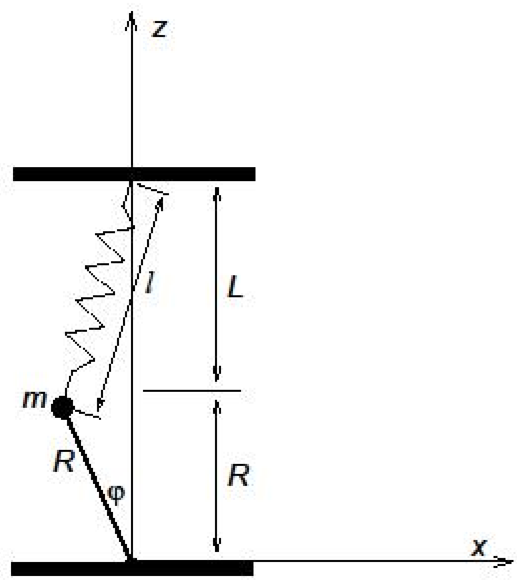

Abbildung 2: Stehendes Pendel an einer Feder

Lösung: Zuerst berechnen wir mittels des Kosinussatzes die Länge l:
$l^2 = (L+R)^2 + R^2 - 2R(L+R)cos\phi = L^2 + (2LR + 2R^2)(1 - cos\phi)$,

$$l = \sqrt{L^2 + 4(LR + R^2)(1 - cos\phi)} \tag{5}$$

Die Energien sind demnach: $T = \frac{mr^2}{2}\dot{\phi}^2$ und $U = mgRcos\phi + \frac{k\left(L - \sqrt{L^2+4(LR+R^2)(1-cos\phi)}\right)^2}{2}$, was die Lagrangegleichung

$\mathcal{L} = \frac{mr^2}{2}\dot{\phi}^2 - mgRcos\phi - \frac{k\left(L - \sqrt{L^2+4(LR+R^2)(1-cos\phi)}\right)^2}{2}$ liefert.
Wir erhalten daraus die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = mgRsin\phi + k(L - \sqrt{L^2+4(LR+R^2)(1-cos\phi)})\frac{-2(LR+R^2)sin\phi}{\sqrt{L^2+4(LR+R^2)(1-cos\phi)}} = mr^2\ddot{\phi} = \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}$$

$$\ddot{\phi} = \frac{g}{R}sin\phi - \frac{k}{m}\frac{2(\frac{L}{R}+1)sin\phi(L - \sqrt{L^2+4(LR+R^2)(1-cos\phi)})}{\sqrt{L^2+4(LR+R^2)(1-cos\phi)}} \qquad (6)$$

4 Trägheitsmoment: Doppelkegel

a) Gegeben ist ein starrer Körper von der Form eines Doppelkegels mit konstanter Dichte ρ(Abmessungen siehe Skizze). Berechnen sie das Trägheitsmoment I_{33} des Zylinders für Drehungen um seine Symmetrieachse, die z-Achse.

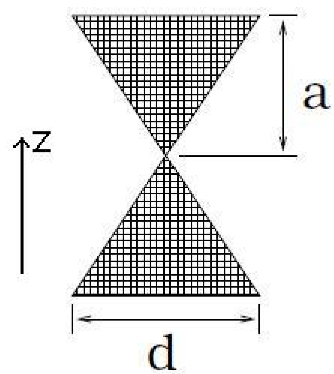

Abbildung 3: Doppelkegel

Lösung: Wir wissen bereits, dass das das Trägheitsmoment einer homogenen Scheibe der Dicke dz und mit Radius r das Trägheitsmoment $dI = \frac{dm}{2}r^2 = \frac{\pi}{2}\rho r^4 dz$ beträgt. Außerdem können wir den Radius der Kreisscheiben in Abhängigkeit von der Höhe z bestimmen: $r(z) = z\frac{d}{2a}$. Jetzt müssen wir nur noch aufintegrieren:

$$I_{33} = \int_{-a}^{a}\frac{\pi}{2}\rho r(z)^4 dz = \frac{\pi}{2}\rho\int_{-a}^{a} z^4\frac{d^4}{16a^4}dz = \frac{\pi\rho d^4}{32a^4}[\frac{z^5}{5}]_{-a}^{a} = \frac{\pi\rho d^4 a}{80} \qquad (7)$$

b) Der Körper rollt nun ohne zu rutschen zuerst auf einer ebenen Bahn die dann beginnt anzusteigen. Am Anfang bewegt sich der Schwerpunkt des Körpers mit einer Geschwindigkeit v_0. Berechnen sie die maximale Höhendifferenz h, die der

Körper erreichen kann, mit dem Energieerhaltungssatz. Sollten Sie im Teil 4.a Schwierigkeiten gehabt haben, rechnen Sie im Beitrag für die Rotationsenergie einfach mit dem Symbol I_{33} ohne die Form dieses Trägheitsmomentes explizit anzugeben.

Lösung: Um die kinetische Energie zu bestimmen, benötigen wir noch die Masse m des Doppelkegels

$$m = \int_{-a}^{a} \rho r(z)^2 \pi dz = \frac{\pi \rho d^2 a}{6} \tag{8}$$

und die Rollbedingung $\omega_0 = \frac{2v_0}{d}$Die kinetische Energie am Anfang beträgt also
$T_0 = \frac{m}{2} {v_0}^2 + \frac{I_{33}}{2} {\omega_0}^2 = \frac{\pi\rho d^2 a}{12} {v_0}^2 + \frac{\pi\rho d^2 a}{40} {v_0}^2 = \frac{13\pi\rho d^2 a}{120} {v_0}^2$.
Das setzen wir mit der potenziellen Energie gleich: $U_0 = T_0, \;\; mgh = \frac{\pi\rho d^2 agh}{6} = \frac{13\pi\rho d^2 a}{120} {v_0}^2$.

$$h = \frac{13 {v_0}^2}{20g} \tag{9}$$

5 Eigenschwingungen

Im Schwerefeld der Erde sei eine Punktmasse m [mit Koordinaten (x_2, z_2)] über einen masselosen Faden der Länge l [mit Ausschlagswinkel θ] an einer Punktmasse $3m$ [mit Koordinaten (x_1, z_1)] aufgehängt, die sich reibungsfrei auf einer Parabel der Form $z_1 = \frac{1}{2l}x_1{}^2$ bewegt (siehe Skizze). Ziel dieser Aufgabe ist es, die Eigenfrequenzen kleiner Schwingungen dieses Systems zu bestimmen. Betrachten Sie somit im Folgenden ausschliesslich den Limes $\theta \ll 1$, und wählen Sie $q_1 := x_1$ und $q_2 := l\theta$ als verallgemeinerte Koordinaten.

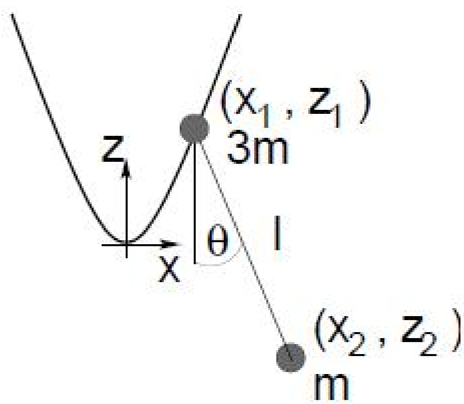

Abbildung 4: Gekoppelte Massen auf parabelförmiger Bahn

a) Drücken Sie x_1, x_2, z_1, z_2, durch die neuen Koordinaten $q_1, q_2, \dot{q_1}, \dot{q_2}$ aus. *Hinweis*: Entwickeln Sie $sin\theta$ und $cos\theta$ bis zur zweiten Ordnung in θ.]

Lösung:

$x_1 = q_1,\ z_1 = \frac{1}{2l}q_1{}^2$
$\dot{x}_1 = \dot{q}_1,\ \dot{z}_1 = \frac{1}{l}q_1\dot{q}_1$
$x_2 = x_1 + lsin\theta = q_1 + l\theta = q_1 + q_2,\ z_2 = z_1 - lcos\theta = \frac{1}{2l}q_1{}^2 - l + l\frac{\theta^2}{2} = \frac{1}{2l}(q_1{}^2 + q_2{}^2 - 2l^2)$
$\dot{x_2} = \dot{q}_1 + \dot{q}_2,\ \dot{z}_2 = \frac{1}{l}(q_1\dot{q}_1 + q_2\dot{q}_2)$

b)Zeigen Sie, dass die Lagrangefunktion $\mathcal{L}(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)$ im Limes kleiner Schwingungen folgende Form hat:
$\mathcal{L}(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{m}{2}(4\dot{q}_1{}^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2{}^2 - \omega_0{}^2(4q_1{}^2 + q_2{}^2 - 2l^2))$ mit $\omega_0{}^2 = \frac{g}{l}$
Hinweis: Terme höherer als quadratischer Ordnung in $q_1, q_2, \dot{q}_1$ und $\dot{q}_2$ (d.h.

Produkte von mehr als zwei dieser Variablen) sollten vernachlässigt werden.

Lösung:

$T = \frac{m}{2}(3\dot{x}_1{}^2 + \dot{x}_2{}^2 + 3\dot{z}_1{}^2 + \dot{z}_2{}^2) = \frac{m}{2}(3\dot{q}_1{}^2 + (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + 3(\frac{1}{l}q_1\dot{q}_1)^2 + (\frac{1}{l}(q_1\dot{q}_1 + q_2\dot{q}_2))^2) = \frac{m}{2}(4\dot{q}_1{}^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2{}^2)$
$U = mg(3z_1 + z_2) = \frac{mg}{2l}(3q_1{}^2 + q_1{}^2 + q_2{}^2 - 2l^2) = \frac{m}{2}\omega_0{}^2(4q_1{}^2 + q_2{}^2 - 2l^2)$
Die Lagrangefunktion ergibt sich wie gehabt aus der Differenz der beiden Energien.

c) Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen ω_1 und ω_2 des Systems.

Lösung:

Zunächst schreiben wir die Lagrange-Funktion in Matrixschreibweise um. Dabei erhalten wir auch eine Konstante (aus dem Potenzial), die durch Ableiten wegfällt ($C = mgl$):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\vec{q}}\cdot\underline{M}\dot{\vec{q}} - \frac{1}{2}\vec{q}\cdot\underline{A}\vec{q} + C = \frac{1}{2}\dot{\vec{q}}\cdot\begin{pmatrix} 4m & m \\ m & m \end{pmatrix}\dot{\vec{q}} - \frac{1}{2}\vec{q}\cdot(m\omega_0{}^2\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})\vec{q} + C \quad (10)$$

Die Bewegunsgleichung lautet dann

$$\underline{M}\ddot{\vec{q}} + \underline{A}\vec{q} = 0 \quad (11)$$

und wir machen wieder den Ansatz

$$\vec{q}(t) = \vec{a}e^{i\omega t} \quad (12)$$

was zu

$$(\underline{A} - \underline{\omega^2 M})\vec{q} = 0 \quad (13)$$

führt. Als nächstes bestimmen wir die Determinante der Summenmatrix, die wir durch m geteilt haben:

$$det\begin{pmatrix} 4\frac{g}{l} - 4\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & \frac{g}{l} - \omega^2 \end{pmatrix} = 4(\frac{g}{l} - \omega^2)^2 - (\omega^2)^2 = 4\left(\frac{g}{l}\right)^2 - 8\frac{g}{l}\omega^2 + 3\left(\omega^2\right)^2 \stackrel{!}{=} 0 \quad (14)$$

Wir erhalten also die Eigenwerte $\omega_1 = \sqrt{2\frac{g}{l}}$ und $\omega_2 = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{g}{l}}$.
d) Berechnen Sie die entsprechenden Eigenmoden und skizzieren Sie qualitativ die Eigenschwingungen für jede der beiden Eigenmoden.

Lösung:

Wir berechnen den Eigenvektor $\vec{C}^{(1)}$ zu ω_1:$\begin{pmatrix} -4\frac{g}{l} & -2\frac{g}{l} \\ -2\frac{g}{l} & -\frac{g}{l} \end{pmatrix}\vec{C}^{(1)} = 0$

$$\Rightarrow \vec{C}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (15)$$

Analog ergibt sich für den Eigenvektor zu ω_2:

$$\vec{C}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{16}$$

Die beiden Massen schwingen also (in den Eigenmoden) entweder gegenläufig oder gemeinsam, wobei jeweils die größere Masse die Hälfte der Amplitude hat.

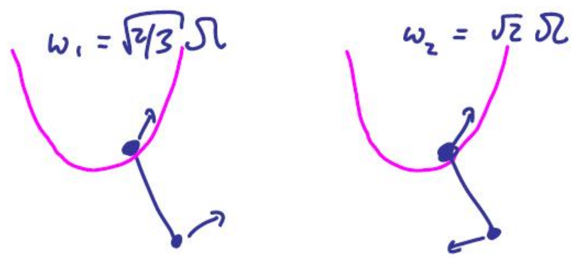

Abbildung 5: Qualitative Darstellung der Eigenmoden