Starre Körper und Rotation

1 Massendichte und Bezugssysteme

in srrer orer is Ssem s ssenelemenen oer ssennen mi esem sn ner einner.

$$\text{ssenie} \quad \vec{r} \quad \lim \quad \frac{m \ \vec{r}}{} \quad \frac{dm}{d} \qquad \text{esmmsse} \quad \int \vec{r} \ d \ r$$

ie sseieereiln n esmmsse eines nssems onnen olenermen resell eren

$$\vec{r} \quad \sum \quad m \ \delta \quad \vec{r} - \vec{r} \quad \Rightarrow \quad \int \vec{r} \ d \ r \quad \sum \quad m \qquad 2$$

ee si er r ie ssenereiln eniere orer so is es sinnoll ie esrein er nmi eilen. n l ein orseses oorinenssem n ein orereses. m olenen eren r s rmese oorinenssem roe sen erene n r s orerese leine

$$\text{rmeses Ssem} \quad \vec{R} \quad , , \qquad \text{orereses Ssem} \quad \vec{r} \quad x, z, z$$

ie erinn er eien oorinensseme ir er einen eor $\vec{R}$ eresell. eis ir r er Sernseor $\vec{R}$ en

$$\vec{R} \quad — \quad \int \vec{r} \quad \vec{r} \ d \ r \quad \vec{R} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{} \ t \quad \frac{d}{dt}\vec{R} \ t$$

ie rnslion es es orers nn so esrieen eren. ie einelnen ssene onnen si er reli m orsesen oorinenssem m eine se r en Sern mi er inel esiniei $\vec{\omega}$ — reen. ie rs reslierene esiniei ir olenermen esrie en

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \quad \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\vec{R}}{dt} \quad \vec{} \quad \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad 4$$

er erse Smmn esrei ie nslionsesiniei n er eie Smmn ie esini ei er oionseen.
rs erennen ir ss s orerese oorinenssem ein nerilssem sein nn es im rmesen oorinenssem roier.

ie osiion es Sernes im m ie r ie rnslion er ner ir ir r rei Freieisre esimm. ie relie rieniern er nereinner es ernenen eilen im orer ie si im orerssem nr r ren eeen ir r eiere rei Freieire esimm.
s esme Ssem lso ses Freieisre.

Starre Körper und Rotation

1 Massendichte und Bezugssysteme

in srrer orer is Ssem s ssenelemenen oer ssennen mi esem sn ner einner.

$$\text{ssenie} \quad \vec{r} \quad \lim \quad \frac{m \ \vec{r}}{} \quad \frac{dm}{d} \qquad \text{esmmsse} \qquad \mathsf{Z} \ \vec{r}\ d\ r$$

ie sseieereiln n esmmsse eines nssems onnen olenermen resell eren

$$\vec{r} \quad \mathsf{X} \quad m\,\delta \quad \vec{r} - \vec{r} \qquad \Rightarrow \qquad \mathsf{Z} \ \vec{r}\ d\ r \quad \mathsf{X} \quad m \qquad (2)$$

ee si er r ie ssenereiln eniere orer so is es sinnoll ie esrein er nmi eilen. n l ein orseses oorinenssem n ein orereses. m olenen eren r s rmese oorinenssem roe sen erene n r s orerese leine

$$\text{rmeses Ssem} \quad \vec{R} \quad , \ , \qquad \text{orereses Ssem} \quad \vec{r} \quad x, z, z$$

ie erinn er eien oorinensseme ir er einen eor $\vec{R}$ eresell. eis ir r er Sernseor $\vec{R}$ en

$$\vec{R} \quad — \quad \mathsf{Z} \ \vec{r} \ \ \vec{r}\ d\ r \quad \vec{R} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{\ } \ t \quad \frac{d}{dt}\vec{R} \ \ t$$

ie rnslion es es orers nn so esrieen eren. ie einelnen ssene onnen si er reli m orsesen oorinenssem m eine se r en Sern mi er inel esiniei $\vec{\omega}$ — reen. ie rs reslierene esiniei ir olenermen esrie en

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \quad \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\vec{R}}{dt} \quad \vec{\ } \quad \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad (4)$$

er erse Smmn esrei ie nslionsesiniei n er eie Smmn ie esini ei er oionseen.
rs erennen ir ss s orerese oorinenssem ein nerilssem sein nn es im rmesen oorinenssem roier.

ie osiion es Sernes im m ie r ie rnslion er ner ir ir r rei Freieisre esimm. ie relie rieniern er nereinner es ernenen eilen im orer ie si im orerssem nr r ren eeen ir r eiere rei Freieire esimm.
s esme Ssem lso ses Freieisre.

Definition 3.1 (Trägheitstensor)

$$I_{\alpha\beta} = \sum_{i=i}^{N} m_i \left(r_i^2 \delta_{\alpha\beta} - x_\alpha x_\beta \right) \qquad \text{bzw.} \qquad I_{\alpha\beta} = \int_V d^3r\, \rho(\vec r) \left(r^2 \delta_{\alpha\beta} - x_\alpha x_\beta \right) \tag{7}$$

Der Trägheitstensor ist unabhängig von der Betrag oder Richtung der Rotation. Multipliziert mit der Winkelgeschwindigkeit zum Quadrat ω^2 erhält man wieder die kinetische Energie und somit die Lagrange-Funktion des starren Körpers:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\vec R}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} I_{\alpha\beta}\, \omega_\alpha \omega_\beta \quad \Rightarrow \quad L = T - U = \underbrace{\frac{1}{2} M \dot{\vec R}^2}_{T_{trans}} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} I_{\alpha\beta}\, \omega_\alpha \omega_\beta}_{T_{rot}} - U \tag{8}$$

Die Summation über α und β entspricht dabei dem Produkt $\vec\omega^T I \vec\omega$.

Der Trägheitstensor ist eine symmetrische reelle Matrix:

$$I = \int_V d^3r\, \rho(\vec r) \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2 + z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2 + y^2 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Wie man die Elemente des Trägheitstensors ausrechnet werden wir uns an einem Beispiel veranschaulichen.

Ein Kreiskegel mit Höhe h, Radius R und homogener Massendichte ρ rotiere um eine Achse, die durch seine Spitze geht und parallel zur Grundfläche ist. Wobei in unserem Beispiel die z-Achse durch die Höhe geht und die Rotationsachse die x-Achse repräsentiert.

Für die Berechnung des Trägheitstensors verwenden wir Zylinderkoordinaten ($x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$; $z = z$). Der Kegel lässt sich somit folgendermaßen ausdrücken:
$\{(r, \varphi, z) \in (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (0, h) \,|\, r \leq \frac{Rz}{h}\}$
Damit können wir beginnen die einzelnen Elemente des Trägheitstensors auszurechnen. Das Volumenelement d^3x lautet in Zylinderkoordinaten
$r\,dr\,d\varphi\,dz$.

$$\begin{aligned} I_{11} = I_{xx} &= \rho \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{Rz}{h}} r\,dr\, \underbrace{r^2 \sin^2\varphi + z^2}_{x^2+y^2+z^2-x^2} = \rho \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{1}{4} \left(\frac{Rz}{h}\right)^4 \sin^2\varphi + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{h}\right)^2 z^4 \right) \\ &= \rho \int_0^h dz \left(\frac{\pi}{4} \left(\frac{R}{h}\right)^4 z^4 + \frac{2\pi}{2} \left(\frac{R}{h}\right)^2 z^4 \right) = \pi\rho \left(\frac{R}{h}\right)^2 \left(\frac{1}{20} \left(\frac{R}{h}\right)^2 h^5 + \frac{1}{5} h^5 \right) = \frac{3}{20} M \left(4h^2 + R^2 \right) \end{aligned} \tag{10}$$

Die Gesamtmasse des Kegels ist dabei $M = \frac{1}{3}\pi\rho R^2 h$.
Die Komponente $I_{22} = I_{yy}$ unterscheidet sich von I_{11} nur dadurch, dass satt des $\sin^2\varphi$ der $\cos^2\varphi$ im Integral enthalten ist. Dieser verschwindet bei der Integration über den Bereich $[0, 2\pi]$ ebenfalls bis auf den Term $\varphi/2$. ($\int \cos^2 ax\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \sin 2ax$; $\int \sin^2 ax\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \sin 2ax$)
Für die Komponente $I_{33} = I_{zz}$ gilt:

$$I_{33} = I_{zz} = \rho \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{Rz}{h}} r\,dr\, \underbrace{r^2}_{x^2+y^2+z^2-z^2} = \frac{\pi\rho}{10} \left(\frac{R}{h}\right)^4 h^5 = \frac{3}{10} M R^2 \tag{11}$$

ie reslien omonenen onnen r erleen lei ll ese eren. ir eren nr ie nerle er .

$$\propto \int d \quad os \quad sin \quad 0$$

$$\propto \int d\, zr \quad os \quad 0 \qquad (2)$$

$$\propto \int d \quad sin \quad 0$$

er r eisensor somi ie Form

$$\begin{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

4 Hauptachsentransformation

m llemeinen is er r eisensor ni ionl. Smmerise rien lssen si er r l eines eeineen oorinenssems ionlorm rinen. s ir lso eine oorinen rnsormion $\{\vec{\ }, \vec{\ }, \vec{\ }\} \rightarrow \{\vec{\ }, \vec{\ }, \vec{\ }\}$ es soss si er r eisensor in er neen sis $\{\vec{\ }, \vec{\ }, \vec{\ }\}$ in ionlorm ^{1} $_{2}$ ^{3} rsellen l ss.

ie inr e er rnsormionsmri sin ie normieren ieneoren $\vec{\ }$ s olenem ien errolem

$$\vec{\ } \quad \lambda \vec{\ } \qquad (4)$$

ie ienere ensreen ere en r eismomenen λ n onnen er s r erisise olnom esimm eren

$$\mathrm{e} \quad - \lambda \quad 0 \quad \rightarrow \lambda$$

inseen in s oie ienerrolem lieer nn ie ieneoren. iese eien in ie in er r eismomene.

ie oionsenerie l ss si somi olenermen sreien

$$T \quad \sum \frac{}{2} \quad \omega$$

Fr en einen Fll er ren m eine r eisse eri si ein

$$T \quad \frac{}{2}\, \omega$$

5 Satz von Steiner

Fr ie oionsse ni r en Sern es Ssems mss er r eisensor n iese Siion ness eren.

ere mn en r eisensor on einem neren oorinenssem s. ieses seinen rsrn m n er m $\vec{\ }$ om Sern nserem len rsrn enern is. er snseor r ssenelemene im neen oorinenssem rnsormier si somi $\vec{r} \quad \vec{r} - \vec{\ }$.

Fr en r eisensor om rsrn s eseen il nn

$$\sum m \; r \; \delta_{;} \; - x \; x \qquad \text{see ein} \qquad \vec{r} \quad \vec{r} - \vec{}$$

$$\sum m \quad r \; - 2\vec{r} \cdot \vec{} \qquad \delta_{;} \; - \; x \; - \qquad x \; -$$

$$\underbrace{\sum m \; r \; \delta_{;} \; - x \; x}_{} \quad \underbrace{\sum m \quad \delta_{;}}_{} \; - \qquad - 2\vec{} \; \underbrace{\sum m \, \vec{r}}_{} \quad \underbrace{\sum m \, \vec{x}}_{} \quad \underbrace{\sum m \, \vec{x}}_{}$$

ie leen rei Smmen ereen im Sernssem nesrien ere ll.
rs ol ire er S on Seiner

$$\Rightarrow \qquad \delta_{;} \; -$$

er r ein r eismomene

6 Drehimpuls starrer Körper

oier er srre orer so er einen reimls. n einem nmssenssem nn er ls Smme einelner reimlse ess eren oer llemeiner er olenes nerl enier eren

$$\vec{} \int d \; r \quad \vec{r} \, \vec{r} \times \vec{}$$

Fr ie esiniei er oion ennen ir en sr $\vec{} \quad - \quad \vec{\omega} \times \vec{r}$ mi er inelesin iei $\vec{\omega}$ —. iese eienen in ie eniion es reimlses einese ereen

$$\vec{} \int d \; r \quad \vec{r} \, \vec{r} \times \; \vec{\omega} \times \vec{r} \quad \text{oei il} \qquad \vec{r} \times \; \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad r \; \vec{\omega} - \vec{r} \; \vec{r} \cdot \vec{\omega}$$

ie reimlsomonenen len mi

$$\int d \; r \quad r \; \vec{\omega} \; - x \qquad \sum x \;\; \omega \qquad \sum \underbrace{\int d \; r \quad r \; \delta \quad - x \;\; x}_{\alpha\beta} \quad \omega$$

$$\Rightarrow \qquad \sum \qquad \omega \qquad \Rightarrow \; \vec{} \qquad \vec{\omega}$$

ie reslien omonenen onnen r erleen lei ll ese eren. ir eren nr ie nerle er .

$$\propto \int d \ \mathrm{os} \ \sin \ 0$$

$$\propto \int d\, zr \ \mathrm{os} \ 0 \qquad 2$$

$$\propto \int d \ \sin \ 0$$

er r eisensor somi ie Form

$$\begin{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

4 Hauptachsentransformation

m llemeinen is er r eisensor ni ionl. Smmerise rien lssen si er r l eines eeineen oorinenssems ionlorm rinen. s ir lso eine oorinen rnsormion $\{\vec{}, \vec{}, \vec{}\} \to \{\vec{}, \vec{}, \vec{}\}$ es soss si er r eisensor in er neen sis $\{\vec{}, \vec{}, \vec{}\}$ in ionlorm $^{1}\ _{2}\ ^{3}$ rsellen l ss.

ie inr e er rnsormionsmri sin ie normieren ieneoren $\vec{}$ s olenem ien errolem

$$\vec{} \quad \lambda \vec{} \qquad 4$$

ie ienere ensreen ere en r eismomenen λ n onnen er s r erisise olnom esimm eren

$$\mathrm{e} \quad -\lambda \quad 0 \quad \to \lambda$$

inseen in s oie ienerrolem lieer nn ie ieneoren. iese eien in ie in er r eismomene.

ie oionsenerie l ss si somi olenermen sreien

$$T \quad \frac{}{2} \sum \quad \omega$$

Fr en einen Fll er ren m eine r eisse eri si ein

$$T \quad \frac{}{2}\, \omega$$

5 Satz von Steiner

Fr ie oionsse ni r en Sern es Ssems mss er r eisensor n iese Siion ness eren.

ere mn en r eisensor on einem neren oorinenssem s. ieses seinen rsrn m n er m $\vec{}$ om Sern nserem len rsrn enern is. er snseor r ssenelemene im neen oorinenssem rnsormier si somi $\vec{r} \quad \vec{r} - \vec{}$.