Übungsaufgaben zur Hamilton-Mechanik

Simon Filser

24.9.09

1 Parabelförmiger Draht

Auf einem parabelförmig gebogenen Draht ($z = ar^2 = a(x^2 + y^2), a = const$), der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω_0 um die z-Achse rotiert, gleitet reibungsfrei eine Perle der Masse m unter dem Einfluß der Schwerkraft (siehe Skizze).

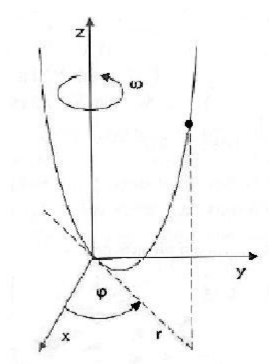

Abbildung 1: Parabelförmiger Draht

a) Stellen Sie die Lagrange- und Hamilton-Funktion des Systems auf.
b) Leiten Sie aus beiden Funktionen die Bewegungsgleichungen des Systems her und vergleichen Sie sie.
c) Überprüfen Sie, ob die Hamilton-Funktion der Energie entspricht und ob die Energie erhalten ist.
d) Lösen Sie das Problem für den Spezialfall ${\omega_0}^2 = 2ag$

Lösung:

a) Mit $\dot{z} = 2ar\dot{r}$ ergibt sich als Lagrange-Funktion

$$T = \frac{m}{2}(\dot{z}^2 + \dot{r}^2 + (r\omega_0)^2) = \frac{m}{2}((2ar\dot{r})^2 + \dot{r}^2 + (r\omega_0)^2) \tag{1}$$

$$U = mgz = mgar^2 \tag{2}$$

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(4a^2r^2\dot{r}^2 + \dot{r}^2 + (r\omega_0)^2) - mgar^2 \tag{3}$$

Der kanonische Impuls ist folglich $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}(4a^2r^2 + 1)$, also gilt $\dot{r} = \frac{p}{m(4a^2r^2+1)}$. Man erhält für die Hamiltonfunktion:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= p\dot{r} - \mathcal{L} = \frac{p^2}{m(4a^2r^2+1)} - (\frac{m}{2}(4a^2r^2\dot{r}^2 + \dot{r}^2 + (r\omega_0)^2) - mgar^2) = \\
&= \frac{p^2}{m(4a^2r^2+1)} - \frac{m}{2}(4a^2r^2+1)(\frac{p}{m(4a^2r^2+1)})^2 + (-\frac{m}{2}\omega_0{}^2 + mga)r^2 = \\
&= \frac{p^2}{2m(4a^2r^2+1)} + (ga - \frac{\omega_0{}^2}{2})mr^2 \qquad (4)
\end{aligned}$$

b) Aus der Lagrange-Funktion ergibt sich:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = 4ma^2r\dot{r}^2 + m\omega_0{}^2 r - 2mgar \tag{5}$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}) = \frac{d}{dt}[(4a^2r^2+1)m\dot{r}] = (4a^2r^2+1)m\ddot{r} + 8ma^2r\dot{r}^2 \tag{6}$$

$$\ddot{r} = -\frac{4a^2\dot{r}^2 - \omega_0{}^2 + 2ga}{(4a^2r^2+1)}r \tag{7}$$

Die kanonischen Gleichungen aus der Hamiltonfunktion sind:

$$\dot{r} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m(4a^2r^2+1)} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
\dot{p} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} = -(-\frac{2 * 4a^2rp^2}{2m(4a^2r^2+1)^2} + 2(ga - \frac{\omega_0{}^2}{2})mr) = \qquad (9)\\
&= (\frac{4a^2p^2}{m(4a^2r^2+1)^2} - 2mga + m\omega_0{}^2)r \qquad (10)
\end{aligned}$$

Die Zeile (6) ergibt ja nichts anderes als $\dot{p}$, also ist es nur logisch, dass $(\frac{4a^2p^2}{m(4a^2r^2+1)^2} - 2mga + m\omega_0{}^2)r = 4ma^2r\dot{r}^2 + m\omega_0{}^2r - 2mgar$ gilt, denn die Bewegungsgleichungen müssen ja äquivalent sein.
c) Die Energie ergibt sich aus den Teilenergien:

$$E = T + U = \frac{m}{2}((2ar\dot{r})^2 + \dot{r}^2 + (r\omega_0)^2) + mgar^2 \tag{11}$$

Man sieht, dass sie in einem Vorzeichen nicht mit der Hamilton-Funktion übereinstimmt.

Um zu überprüfen, ob die Energie erhalten ist, bilden wir wieder die Zeitableitung:

$$\frac{dE}{dt} = m(4a^2r^2\dot{r}\ddot{r} + 4a^2r\dot{r}^3 + \dot{r}\ddot{r} + (\omega_0{}^2 + 2ga)r\dot{r}) \neq 0 \tag{12}$$

Die Energie ist also nicht erhalten, weil wie im bekannten Beispiel des rotierenden Rings durch die konstante Winkelgeschwindigkeit Energie zu- und abgeführt wird.
Alternativ kann kann man auch durch $\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t} = 0$ sehen, dass die Hamilton-Funktion erhalten ist und nicht der Energie entsprechen kann.
d) Im Fall $\omega_0{}^2 = 2ag$ heben sich Gravitation und Zentripetalkraft genau gegenseitig auf (und zwar an jedem Punkt). Die neuen Bewegungsgleichungen lauten:

$$\ddot{r} = -\frac{4a^2\dot{r}^2}{(4a^2r^2+1)}r \tag{13}$$

bzw.

$$\dot{p} = (\frac{4a^2p^2}{m(4a^2r^2+1)^2})r \tag{14}$$

2 Kanonische Transformation

Die Lagrange-Funktion für ein geladenes Teilchen (Masse $m = 1$, Ladung $e = 1$) in der $q_1 - q_2-$ Ebene, senkrecht zu einem homogenen Magnetfeld der Stärke B, lautet

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{q_1}^2 + \dot{q_2}^2 + B(q_1\dot{q_2} - q_2\dot{q_1})) \tag{15}$$

a) Zeigen Sie, dass für die Hamiltonfunktion des Systems gilt:
$\mathcal{H}(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}(p_1 + \frac{B}{2}q_2)^2 + \frac{1}{2}(p_2 - \frac{B}{2}q_1)^2$.
b) Gegeben sei die Transformation

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{\alpha}(\sqrt{2P_1}sinQ_1 + P_2) \\ p_1 &= \frac{\alpha}{2}(\sqrt{2P_1}cosQ_1 - Q_2) \\ q_2 &= \frac{1}{\alpha}(\sqrt{2P_1}cosQ_1 + Q_2) \\ p_2 &= \frac{\alpha}{2}(-\sqrt{2P_1}sinQ_1 + P_2) \end{aligned} \tag{16}$$

Bilden Sie die Poissonklammern $\{q_1, p_1\}_{Q,P}$ und $\{q_1, q_2\}_{Q,P}$. Kann die Transformation kanonisch sein?
c) Wählen Sie nun$\alpha = \sqrt{B}$. Zeigen Sie, dass die Hamilton-Funktion, ausgedrückt durch die neuen Variablen, $\mathcal{H}(q_1, q_2, p_1, p_2) =: \tilde{\mathcal{H}}(Q_1, Q_2, P_1, P_2)$, die Form $\tilde{\mathcal{H}} = \omega P_1$ hat, und bestimmen Sie ω.

d) Stellen Sie die kanonischen Gleichungen in den neuen Variablen auf und bestimmen Sie mit ihnen $Q_1(t)$, $P_1(t)$,$Q_2(t)$ und $P_2(t)$ zu den Anfangsbedingungen $P_1(0) = \frac{r^2\alpha^2}{2}, Q_1(0) = Q_2(0) = P_2(0) = 0$
e) Bestimmen Sie $q_1(t)$ und $q_2(t)$, indem Sie die Ergebnisse aus d) in (16) einsetzen. Welche Bewegung ergibt sich?

Lösung:

a) Wir bestimmen wieder zuerst die kanonischen Impulse: $p_1 = \dot{q_1} - \frac{B}{2}q_2$, $p_2 = \dot{q_2} + \frac{B}{2}q_1$,
also gilt: $\dot{q_1} = p_1 + \frac{B}{2}q_2$ und $\dot{q_2} = p_2 - \frac{B}{2}q_1$. Damit kann man die Hamilton-Funktion berechnen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(q,p) &= \dot{q_1}p_1 + \dot{q_2}p_2 - \mathcal{L} = \\
&= {p_1}^2 + \frac{B}{2}p_1q_2 + {p_2}^2 - \frac{B}{2}p_2q_1 - \frac{1}{2}({\dot{q_1}}^2 + {\dot{q_2}}^2 + B(q_1\dot{q_2} - q_2\dot{q_1})) \\
&= {p_1}^2 + \frac{B}{2}p_1q_2 + {p_2}^2 - \frac{B}{2}p_2q_1 - \frac{1}{2}((p_1 + \frac{B}{2}q_2)^2 + (p_2 - \frac{B}{2}q_1)^2 + \\
&+ B(q_1(p_2 - \frac{B}{2}q_1) - q_2(p_1 + \frac{B}{2}q_2))) = \\
&= \frac{1}{2}({p_1}^2 + {p_2}^2 + B(p_1q_2 - p_2q_1) + \frac{B^2}{4}({q_1}^2 + {q_2}^2)) = \\
&= \frac{1}{2}(p_1 + \frac{B}{2}q_2)^2 + \frac{1}{2}(p_2 - \frac{B}{2}q_1)^2
\end{aligned}$$

b) Wenn man die beiden angegebenen Poissonklammern ausführt, erhält man Ergebnisse, die darauf hindeuten, dass die Transformation kanonisch ist (sie ist es auch tatsächlich):

$$\begin{aligned}
\{q_1,p_1\}_{Q,P} &= \frac{\partial q_1}{\partial Q_1}\frac{\partial p_1}{\partial P_1} - \frac{\partial q_1}{\partial P_1}\frac{\partial p_1}{\partial Q_1} + \frac{\partial q_1}{\partial Q_2}\frac{\partial p_1}{\partial P_2} - \frac{\partial q_1}{\partial P_2}\frac{\partial p_1}{\partial Q_2} = \\
&= \frac{1}{\alpha}\sqrt{2P_1}cosQ_1\frac{\alpha}{2\sqrt{2P_1}}cosQ_1 - \\
&- \frac{1}{\alpha\sqrt{2P_1}}sinQ_1\frac{\alpha}{2}\sqrt{2P_1}(-sinQ_1) + 0 - \frac{1}{\alpha}(-\frac{\alpha}{2}) \\
&= \frac{1}{2}(cos^2Q_1 + sin^2Q_1) + \frac{1}{2} = 1
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
\{q_1,q_2\}_{Q,P} &= \frac{\partial q_1}{\partial Q_1}\frac{\partial q_2}{\partial P_1} - \frac{\partial q_1}{\partial P_1}\frac{\partial q_2}{\partial Q_1} + \frac{\partial q_1}{\partial Q_2}\frac{\partial q_2}{\partial P_2} - \frac{\partial q_1}{\partial P_2}\frac{\partial q_2}{\partial Q_2} = \\
&= \frac{1}{\alpha}\sqrt{2P_1}cosQ_1\frac{1}{\alpha\sqrt{2P_1}}cosQ_1 - \\
&- \frac{1}{\alpha\sqrt{2P_1}}sinQ_1\frac{1}{\alpha}\sqrt{2P_1}(-sinQ_1) + 0 - \frac{1}{\alpha}\frac{1}{\alpha} = \\
&= \frac{1}{\alpha^2}(cos^2Q_1 + sin^2Q_2 - 1) = 0
\end{aligned} \tag{18}$$

c) Wir setzen die transformierten Variablen ein und erhalten

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{H}} &= \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{B}}{2}(\sqrt{2P_1}cosQ_1 - Q_2) + \frac{B}{2}\frac{1}{\sqrt{B}}(\sqrt{2P_1}cosQ_1 + Q_2))^2 + \\
&+ \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{B}}{2}(-\sqrt{2P_1}sinQ_1 + P_2) - \frac{B}{2}\frac{1}{\sqrt{B}}(\sqrt{2P_1}sinQ_1 + P_2))^2 = \\
&= \frac{1}{2}\frac{B}{4}(\sqrt{2P_1}cosQ_1 - Q_2 + \sqrt{2P_1}cosQ_1 + Q_2)^2 + \qquad (19) \\
&+ \frac{1}{2}\frac{B}{4}(-\sqrt{2P_1}sinQ_1 + P_2 - \sqrt{2P_1}sinQ_1 - P_2))^2 = \\
&= \frac{B}{8}(8P_1cos^2Q_1 + 8P_1sin^2Q_1) = BP_1
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \omega = B \qquad (20)$$

d) $\mathcal{H}$ hängt nur von P_1 ab, also gilt:

$$\dot{Q}_1 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_1} = B; \quad \dot{P}_1 = \dot{Q}_2 = \dot{P}_2 = 0 \qquad (21)$$

Zusammen mit den Anfangsbedingungen und einfacher Integration ergibt sich

$$Q_1(t) = Bt, \quad P_1(t) = \frac{r^2\alpha^2}{2}, \quad Q_2(0) = P_2(0) = 0 \qquad (22)$$

e) $q_1(t) = \frac{1}{\alpha}(\sqrt{2P_1(t)}sinQ_1(t) + P_2(t)) = rsin(Bt)$
$q_2(t) = \frac{1}{\alpha}(\sqrt{2P_1(t)}cosQ_1(t) + Q_2(t)) = rcos(Bt)$
Also ergibt sich eine Kreisbewegung.

3 Phasenraum

Betrachten Sie einen Massenpunkt der Masse m, der sich unter dem Einfluss der Gravitation auf einem senkrecht stehenden Ring mit Radius r frei bewegen kann. Dabei sei q der Auslenkungswinkel aus der Senkrechten (für $q = 0$ befindet sich der Massenpunkt unten) und p der dazu konjugierte Impuls.
a) Stellen Sie die Hamilton-Funktion des Systems auf, der Nullpunkt des Potenzials soll bei $q = 0$ liegen.
b) Drücken Sie $p(q)$ durch q und E aus.
c) Zeichnen Sie $p(q)$ im Phasenraum für $E < 2mgr$, $E = 2mgr$ und $E > 2mgr$. Hinweis: Zeichnen Sie zunächst die Trajektorie für $E = 2mgr$ und verwenden Sie dabei das Theorem $1 + cos2x = 2cos^2x$.

Betrachten Sie im Folgenden nur kleine Auslenkungen aus der Ruhelage.

d) Welche Form nimmt die Phasenraumkurve für kleine Auslenkungen an? Bestimmen Sie auch die Periodendauer T und die Amplitude $q_{max}(p_{max})$, wobei q_{max} die maximale Auslenkung und p_{max} der maximale Impuls sind.
e) Wir betrachten ein Ensemble von Massenpunkten, die sich, ohne miteinander zu wechselwirken, in der Nähe des Punktes $q = 0$ bewegen. Zur Startzeit befinden sich alle Punkte zwischen $q = 0$ und $q = h$, wobei h viel kleiner ist als die Amplitude der betrachteten Schwingung. Außerdem haben die Punkte gleichmäßig verteilte Impulse zwischen $p = 0$ und $p = p_0$. Sie nehmen also im Phasenraum eine Fläche von hp_0 ein. Zeigen Sie, dass die Punkte auch zur Zeit $t = \frac{T}{4}$ die Fläche hp_0 einnehmen. *Hinweis:* Stellen Sie $p(t)$ und $q(t)$ als trigonometrische Funktionen dar.

Lösung:

a) Da hier der typische Fall vorliegt, bei dem die kinetische Energie nur quadratisch von der Geschwindigkeit abhängt und das Potenzial geschwindigkeitsunabhängig ist, entspricht die Hamiltonfunktion der Energie.

Die Lagrangefunktion ist $\mathcal{L} = \frac{m}{2} r^2 \dot{q}^2 - mgr(1 - cosq)$

Der kanonische Impuls ergibt sich aus $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = mr^2 \dot{q}$

$$\mathcal{H} = E = T + U = \frac{p^2}{2mr^2} + mgr(1 - cosq) \tag{23}$$

b) Lösen wir diese Gleichung nach p auf, erhalten wir

$$p(q) = \pm\sqrt{2mr^2(E - mgr(1 - cosq))} \tag{24}$$

c) Die Trajektorien für $E = 2mgr$ sehen aus, als würden sie sich schneiden, was ja Phasenraumtrajektorien normal nicht machen dürfen, da jedem Punkt eindeutig eine Bewegung zugeordnet ist. Bei dieser Energie tritt aber der (pathologische) Fall auf, dass der Massenpunkt genau am höchsten Punkt zum stehen kommt und in beide Richtungen herunterrutschen kann. Der Zustand ist also nicht eindeutig. Wir erhalten die Form über den Hinweis:

$$\begin{aligned} p(q) &= \pm\sqrt{2mr^2(E - mgr(1 - cosq))} = \pm\sqrt{2mr^2(2mgr - mgr(1 - cosq))} = \\ &= \pm\sqrt{2m^2r^3g(1 + cosq)} = \pm\sqrt{2m^2r^3g2cos^2(\frac{q}{2})} = \pm 2mr\sqrt{rg}cos(\frac{q}{2}) \end{aligned} \tag{25}$$

In dieser Form ist es jetzt möglich, den Graphen zu zeichnen. Die Graphen für die anderen Energien befinden sich entsprechend oberhalb oder unterhalb dieses Graphen:
Die ellipsenförmigen Trajektorien entsprechen einer Energie mit $E < 2mgr$, sie stellen eine Schwingung um den niedrigsten Punkt auf dem Ring dar.
Für $E > 2mgr$ ergeben sich die Wellenlinien oben und unten im Diagramm (je nach Umlauf im oder gegen den Uhrzeigersinn), weil der Massenpunkt nicht zum stehen kommt, sondern (mit nicht konstanter Geschwindigkeit) rotiert.

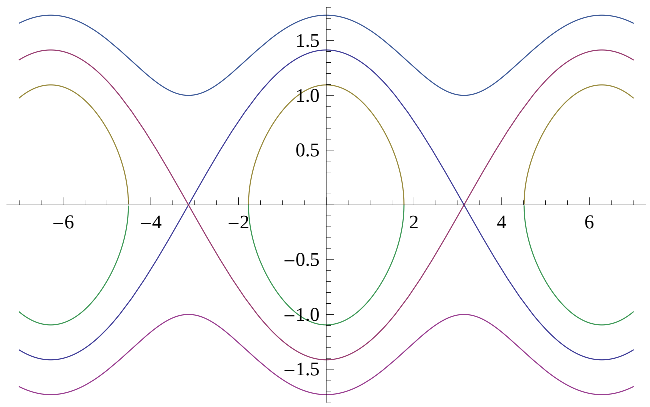

Abbildung 2: Phasenraumdiagramm für verschiedene Energien

d) Für kleine Auslenkungen setzt man $cosq \approx 1 - \frac{q^2}{2}$. Also erhält man aus (23) die Ellipsengleichung

$$\frac{p^2}{2Emr^2} + \frac{q^2}{\frac{2E}{mgr}} = 1 \tag{26}$$

Um die Winkelgeschwindigkeit zu erhalten, bestimmen wir die kanonischen Gleichungen

$$\dot{p} = -mgrq \tag{27}$$

$$\dot{q} = \frac{p}{mr^2} \tag{28}$$

und setzen sie ineinander ein:

$$\ddot{q} = \frac{\dot{p}}{mr^2} = -\frac{g}{r}q, \quad \ddot{p} = -mgr\dot{q} = -\frac{g}{r}p \tag{29}$$

Die Winkelgeschwindigkeit dieses harmonischen Oszillators ist wie beim Pendel $\omega = \sqrt{\frac{g}{r}}$. Also beträgt die Periodendauer $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$.
Um die Amplitude $q_{max}(p_{max})$ in Abhängigkeit von p_{max}zu bestimmen, betrachten wir die Zustände, bei denen die gesamte Energie in Form von kinetischer bzw. potentieller Energie vorliegt: $E = \frac{{p_{max}}^2}{2mr^2}$, $E = mgr\frac{{q_{max}}^2}{2}$. Also gilt:

$$q_{max}(p_{max}) = \frac{p_{max}}{mr^2\omega} \tag{30}$$

e) Für den hier vorliegenden harmonischen Oszillator gelten die Beziehungen

$$\ddot{q} + \frac{g}{r}q = 0 \qquad , \qquad \ddot{p} + \frac{g}{r}p = 0 \tag{31}$$

Man kann die Koordinaten damit in Abhängigkeit von der Zeit ausdrücken, q und p sind dabei zueinander um $\frac{\pi}{2}$ phasenverschoben (p ist proportional zu $\dot{q}$, für $q = q_a sin(\omega t + \phi)$ ergibt sich somit $p = p_a cos(\omega t + \phi))$, was sich durch cos und sin darstellen lässt. Das funktioniert, weil wir in 3d) berechnet haben, dass eine harmonische Oszillation mit der Winkelgeschwindigkeit ω stattfindet

$$q(t) = q_a sin(\omega t + \phi),\ p(t) = p_a cos(\omega t + \phi) \tag{32}$$

wobei p_a bzw q_a die jeweiligen Amplituden sind. Für die Punkte, die am Anfang auf der p-Achse liegen, ist dann$\phi = 0$.
Für allgemeine Punkte haben wir zur Zeit $t = 0$: $q(0) = q_a sin(\phi)$, $p(0) = p_a cos(\phi)$
Zur Zeit $t = \frac{T}{4} = \frac{2\pi}{4\omega} = \frac{\pi}{2\omega}$ gilt dann

$$q(\frac{T}{4}) = q_a sin(\omega \frac{\pi}{2\omega} + \phi) = q_a cos(\phi) = q_a \frac{p(0)}{p_a} = \frac{p(0)}{mr^2\omega} \in [0, \frac{p_{max}}{mr^2\omega}] \tag{33}$$

und analog

$$p(\frac{T}{4}) = -p_a sin(\phi) = -p_a \frac{q(0)}{q_a} = -q(0)mr^2\omega \in [-hmr^2\omega, 0] \tag{34}$$

wobei p_a bzw q_a die jeweiligen Amplituden sind (Achtung: $p_{max} \neq p_a$), die über

$$q_a(p_a) = \frac{p_a}{mr^2\omega} \tag{35}$$

zusammenhängen (analog zu (30)).
[Die Punkte mit $q(0) = 0$, die also auf der p-Achse starten, besetzen somit zur Zeit $t = \frac{T}{4}$ den Abschnitt der q-Achse zwischen dem Ursprung und $q = \frac{p_0}{mr^2\omega}$.
Für die Punkte mit $q(0) = h$ gilt also: $h = q_a sin(\phi)$, bzw. $sin(\phi) = \frac{h}{q_a}$. Jetzt können wir den Impuls dieser Punkte zur Zeit $t = \frac{T}{4}$ berechnen (wir verwenden den Zusammenhang (35)):

$$p(\frac{T}{4}) = -p_{max} \frac{h}{q_{max}} = -\frac{p_{max} hmr^2\omega}{p_{max}} = -hmr^2\omega \tag{36}$$

Deshalb haben alle Punkte, die mit $q(0) = h$ starten, zur Zeit $t = \frac{T}{4}$ den Impuls $p(\frac{T}{4}) = -hmr^2\omega$.]
Man erhält also eine zur q-Achse parallele, um $hmr^2\omega$ nach unten verschobene Gerade, auf der die Punkte mit Anfangskoordinate h liegen, alle anderen Punkte liegen zwischen diesen beiden Geraden und wir erhalten insgesamt ein Rechteck der Kantenlängen $a = \frac{p_{max}}{mr^2\omega}$ (in q-Richtung) und $b = hmr^2\omega$(in p-Richtung), also mit der Fläche $A = hp_{max}$.

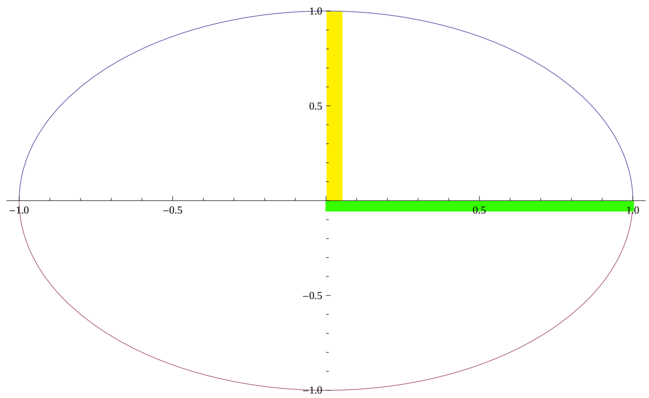

Abbildung 3: Bewegung der Fläche im Phasenraum

4 Einzelne Rechenaufgaben

a) Ein Teilchen bewegt sich im zylindersymmetrischen Potenzial

$$U(r) = U_0(\frac{r^2}{{r_o}^2} + \frac{r^3}{{r_0}^3}) \tag{37}$$

Wie lautet die Hamilton-Funktion? Welche Größen sind erhalten?

Lösung:

Da wir es hier mit einem typischen Fall zu tun haben, also einem nur ortsabhängigen Potenzial und gewöhnlichen kinetischen Energien, können wir die Hamilton-Funktion gleich mit der Energie gleichsetzen:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi} + \dot{z}^2) = \frac{{p_r}^2}{2m} + \frac{{p_\phi}^2}{2mr^2} + \frac{{p_z}^2}{2m} \tag{38}$$

$$\mathcal{H} = \frac{{p_r}^2}{2m} + \frac{{p_\phi}^2}{2mr^2} + \frac{{p_z}^2}{2m} + U_0(\frac{r^2}{{r_o}^2} + \frac{r^3}{{r_0}^3}) \tag{39}$$

Zur Überprüfung der Zeitabhängigkeit der Impulse bilden wir die kanonischen Gleichungen:

$$\dot{p_r} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} = -U_0(\frac{2r}{{r_0}^2} + \frac{3r^2}{{r_0}^3}) \neq 0 \tag{40}$$

$$\dot{p_\phi} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} = 0 \tag{41}$$

$$\dot{p_z} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} = 0 \tag{42}$$

Schließlich überprüfen wir noch, ob die Energie erhalten ist:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0 \tag{43}$$

Also sind Energie und die Impulse p_ϕ und p_z erhalten.

b) Überprüfen Sie, ob folgende Transformation kanonisch ist:

$$Q = arctan(\frac{q}{p}), \quad P = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) \tag{44}$$

Lösung:
Wir bestimmen die Poissonklammer

$$\{Q, P\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = \frac{1}{1+\frac{q^2}{p^2}}\frac{1}{p}p - \frac{1}{1+\frac{q^2}{p^2}}(-\frac{q}{p^2})q = \frac{1+\frac{q^2}{p^2}}{1+\frac{q^2}{p^2}} = 1 \tag{45}$$

Somit ist die Transformation kanonisch.

c) Wie lautet die Hamilton-Funktion zu folgenden Energien

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2), \; U = \frac{a}{r} - b\dot{\phi}t^2 \tag{46}$$

Ist die Energie erhalten und entspricht sie der Hamilton-Funktion?

Lösung:
Zuerst berechnen wir wieder die Lagrange-Funktion und damit die kanonischen Impulse zu r und ϕ:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - \frac{a}{r} + b\dot{\phi}t^2 \tag{47}$$

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \Rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m} \tag{48}$$

$$p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi} + bt^2 \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{p_\phi - bt^2}{mr^2} \tag{49}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \dot{r}p_r + \dot{\phi}p_\phi - \mathcal{L} = \frac{{p_r}^2}{m} + p_\phi(\frac{p_\phi - bt^2}{mr^2}) - \\
&- (\frac{m}{2}((\frac{p_r}{m})^2 + r^2(\frac{p_\phi - bt^2}{mr^2})^2) - \frac{a}{r} + b(\frac{p_\phi - bt^2}{mr^2})t^2) = \\
&= \frac{{p_r}^2}{2m} + p_\phi(\frac{p_\phi - bt^2}{mr^2}) - \frac{(p_\phi - bt^2)^2}{2mr^2} + \frac{a}{r} - b(\frac{p_\phi - bt^2}{mr^2})t^2
\end{aligned} \tag{50}$$

Die Energie, ausgedrückt durch die Impulse beträgt:

$$\begin{aligned} E &= \frac{m}{2}((\frac{p_r}{m})^2 + r^2(\frac{p_\phi - bt^2}{mr^2})^2) + \frac{a}{r} - b(\frac{p_\phi - bt^2}{mr^2})t^2 = \\ &= \frac{p_r{}^2}{2m} + \frac{(p_\phi - bt^2)^2}{2mr^2} + \frac{a}{r} - b(\frac{p_\phi - bt^2}{mr^2})t^2 \end{aligned} \tag{51}$$

Also entspricht die Hamilton-Funktion nicht der Energie. Dass beide nicht erhalten sind, erkennt man an der expliziten Zeitabhängigkeit des Terms bt^2 im Potenzial.