Übungsaufgaben zur Hamilton-Mechanik

Simon Filser

24.9.09

1 Parabelförmiger Draht

Auf einem parabelförmig gebogenen Draht ($z = ar^2 = a(x^2 + y^2), a = const$), der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω_0 um die z-Achse rotiert, gleitet reibungsfrei eine Perle der Masse m unter dem Einfluß der Schwerkraft (siehe Skizze).

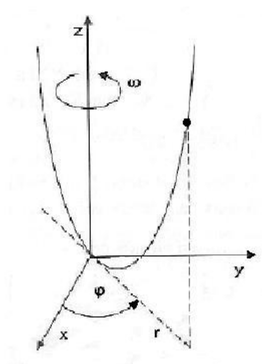

Abbildung 1: Parabelförmiger Draht

a) Stellen Sie die Lagrange- und Hamilton-Funktion des Systems auf.
b) Leiten Sie aus beiden Funktionen die Bewegungsgleichungen des Systems her und vergleichen Sie sie.
c) Überprüfen Sie, ob die Hamilton-Funktion der Energie entspricht und ob die Energie erhalten ist.
d) Lösen Sie das Problem für den Spezialfall ${\omega_0}^2 = 2ag$

2 Kanonische Transformation

Die Lagrange-Funktion für ein geladenes Teilchen (Masse $m = 1$, Ladung $e = 1$) in der $q_1 - q_2-$ Ebene, senkrecht zu einem homogenen Magnetfeld der Stärke B, lautet

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{q_1}^2 + \dot{q_2}^2 + B(q_1\dot{q_2} - q_2\dot{q_1})) \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass für die Hamiltonfunktion des Systems gilt:
$\mathcal{H}(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}(p_1 + \frac{B}{2}q_2)^2 + \frac{1}{2}(p_2 - \frac{B}{2}q_1)^2$.
b) Gegeben sei die Transformation

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{\alpha}(\sqrt{2P_1}sinQ_1 + P_2) \\ p_1 &= \frac{\alpha}{2}(\sqrt{2P_1}cosQ_1 - Q_2) \\ q_2 &= \frac{1}{\alpha}(\sqrt{2P_1}cosQ_1 + Q_2) \\ p_2 &= \frac{\alpha}{2}(-\sqrt{2P_1}sinQ_1 + P_2) \end{aligned} \tag{2}$$

Bilden Sie die Poissonklammern $\{q_1, p_1\}_{Q,P}$ und $\{q_1, q_2\}_{Q,P}$. Kann die Transformation kanonisch sein?
c) Wählen Sie nun$\alpha = \sqrt{B}$. Zeigen Sie, dass die Hamilton-Funktion, ausgedrückt durch die neuen Variablen, $\mathcal{H}(q_1, q_2, p_1, p_2) =: \tilde{\mathcal{H}}(Q_1, Q_2, P_1, P_2)$, die Form $\tilde{\mathcal{H}} = \omega P_1$ hat, und bestimmen Sie ω.
d) Stellen Sie die kanonischen Gleichungen in den neuen Variablen auf und bestimmen Sie mit ihnen $Q_1(t)$, $P_1(t)$,$Q_2(t)$ und $P_2(t)$ zu den Anfangsbedingungen $P_1(0) = \frac{r^2\alpha^2}{2}, Q_1(0) = Q_2(0) = P_2(0) = 0$
e) Bestimmen Sie $q_1(t)$ und $q_2(t)$, indem Sie die Ergebnisse aus d) in (2) einsetzen. Welche Bewegung ergibt sich?

3 Phasenraum

Betrachten Sie einen Massenpunkt der Masse m, der sich unter dem Einfluss der Gravitation auf einem senkrecht stehenden Ring mit Radius r frei bewegen kann. Dabei sei q der Auslenkungswinkel aus der Senkrechten (für $q = 0$ befindet sich der Massenpunkt unten) und p der dazu konjugierte Impuls.
a) Stellen Sie die Hamilton-Funktion des Systems auf, der Nullpunkt des Potenzials soll bei $q = 0$ liegen.
b) Drücken Sie $p(q)$ durch q und E aus.
c) Zeichnen Sie $p(q)$ im Phasenraum für $E < 2mgr$, $E = 2mgr$ und $E > 2mgr$. Hinweis: Zeichnen Sie zunächst die Trajektorie für $E = 2mgr$ und verwenden Sie dabei das Theorem $1 + cos2x = 2cos^2x$.

Betrachten Sie im Folgenden nur kleine Auslenkungen aus der Ruhelage.

d) Welche Form nimmt die Phasenraumkurve für kleine Auslenkungen an? Bestimmen Sie auch die Periodendauer T und die Amplitude $q_{max}(p_{max})$, wobei q_{max} die maximale Auslenkung und p_{max} der maximale Impuls sind.
e) Wir betrachten ein Ensemble von Massenpunkten, die sich, ohne miteinander zu wechselwirken, in der Nähe des Punktes $q = 0$ bewegen. Zur Startzeit befinden sich alle Punkte zwischen $q = 0$ und $q = h$, wobei h viel kleiner ist als die Amplitude der betrachteten Schwingung. Außerdem haben die Punkte gleichmäßig verteilte Impulse zwischen $p = 0$ und $p = p_0$. Sie nehmen also im Phasenraum eine Fläche von hp_0 ein. Zeigen Sie, dass die Punkte auch zur Zeit $t = \frac{T}{4}$ die Fläche hp_0 einnehmen. *Hinweis:* Stellen Sie $p(t)$ und $q(t)$ als trigonometrische Funktionen dar.

4 Einzelne Rechenaufgaben

a) Ein Teilchen bewegt sich im zylindersymmetrischen Potenzial

$$U(r) = U_0(\frac{r^2}{{r_o}^2} + \frac{r^3}{{r_0}^3}) \tag{3}$$

Wie lautet die Hamilton-Funktion? Welche Größen sind erhalten?

b) Überprüfen Sie, ob folgende Transformation kanonisch ist:

$$Q = arctan(\frac{q}{p}), \quad P = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) \tag{4}$$

c) Wie lautet die Hamilton-Funktion zu folgenden Energien

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2), \; U = \frac{a}{r} - b\dot{\phi}t^2 \tag{5}$$

Ist die Energie erhalten und entspricht sie der Hamilton-Funktion?