Michael Schrapp Übungsblatt 3

Ferienkurs *Theoretische Mechanik 2009*

Hamilton Formalismus und gekoppelte Systeme

1 Hamilton-Mechanik

1.1 Aus *Doctoral General Examination (2002)* des MIT

Ein Teilchen der Masse m ist durch einen Faden mit variabler Länge $l(t)$ mit dem Ursprung verbunden. Ferner ist das Teilchen in einer Ebene gebunden. Die Länge $l(t)$ des Fadens ist beliebig, aber stets gilt, dass $|l/\dot{l}|$ viel größer als die Schwingungsdauer des Pendels ist und $\dot{l} \geq 0$. Die Ebene enthält den Aufhängepunkt des Fadens und ihre Normale stehe senkrecht zu einem homogenen Gravitationsfeld.

i.) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}, t)$ und die Hamilton-Funktion $\mathcal{H}(\theta, p, t)$ dieses dynamischen Systems.

Lösung:

Wenn θ den Winkel bezeichnet, der die Auslenkung aus der Ruhelage des Systems beschreibt, so ist die potentielle Energie stets gegeben durch:

$$V = -mgl\cos\theta$$

Ferner kann die Berechnung der kinetischen Energie in ebenen Polarkoordinaten erfolgen:

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{l}^2 + l^2\dot{\theta}^2\right)$$

Die Lagrange-Funktion des Systems lautet daher:

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}, t) = \frac{m}{2}\left(\dot{l}(t)^2 + l(t)^2\dot{\theta}^2\right) + mgl(t)\cos\theta$$

Der zu θ kanonisch konjugierte Impuls errechnet sich zu:

$$p = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = ml(t)^2\dot{\theta}$$

Über die Definition der Hamilton-Funktion $\mathcal{H}$ folgt daher:

$$\mathcal{H}(\theta, p, t) = \dot{\theta}p - \mathcal{L} = -\frac{m}{2}\dot{l}(t)^2 + \frac{p^2}{2ml(t)^2} - mgl(t)\cos\theta$$

ii.) Ist die Hamilton-Funktion gleich der Gesamtenergie des Systems? Ist die Hamilton-Funktion erhalten? Falls die Hamilton-Funktion nicht gleich der Gesamtenergie ist, ist die Gesamtenergie erhalten?

Lösung:

Die Gesamtenergie des Systems $T+V$ ist

$$E = T + V = \frac{m}{2}\dot{l}(t)^2 + \frac{p^2}{2ml(t)^2} - mgl(t)\cos\theta = \mathcal{H} + m\dot{l}(t)^2 \neq \mathcal{H}$$

Offenbar ist die Hamilton-Funktion nicht gleich der Gesamtenergie des Systems. Die Hamilton-Funktion ist nicht erhalten, da

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -m\dot{l}(t)\ddot{l}(t) - \frac{p^2}{ml(t)^3}\dot{l}(t) - mg\dot{l}(t)\cos\theta \neq 0$$

Die Gesamtenergie ist auch nicht erhalten, da

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d\mathcal{H}}{dt} + 2m\dot{l}(t)\ddot{l}(t) \neq 0$$

iii.) Geben Sie eine Bewegungsgleichung für den Winkel θ an. Wie groß ist die Periodendauer der Schwingung, wenn $\dot{l} = 0$ gilt, in der Kleinwinkelnäherung?

Lösung:

Die Bewegungsgleichung für θ ergibt sich beispielsweise aus den Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} ml(t)^2\dot{\theta} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -mgl(t)\sin\theta$$

Daraus kann die Bewegungsgleichung gewonnen werden:

$$\ddot{\theta} + 2\frac{\dot{l}(t)}{l(t)}\dot{\theta} + \frac{g}{l(t)}\sin\theta = 0$$

Setzt man nun $\dot{l} = 0$ und $\sin\theta \approx \theta$ an, so findet sich die Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Offenbar beträgt die Schwingungsdauer:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

1.2 Harmonischer Oszillator

Geben Sie die Bewegungsgleichungen des eindimensionalen harmonischen Oszillators mit den Poisson-Klammern an (kanonische Gleichungen).

Lösung:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= T + U \\ &= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2\end{aligned}$$

Die kanonischen Gleichungen führen auf:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} = \{x, \mathcal{H}\} &= \left\{x, \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2\right\} \\
&= \frac{1}{2m}\left\{x, p^2\right\} + \frac{1}{2}k\underbrace{\left\{x, x^2\right\}}_{=0} \\
&= \frac{1}{2m}\left(\underbrace{\{x, p\}}_{=1}p + p\underbrace{\{x, p\}}_{=1}\right) \\
\Rightarrow & \underline{\dot{x} = \frac{p}{m}}
\end{aligned}
$$

Und

$$
\begin{aligned}
\dot{p} = \{p, \mathcal{H}\} &= \left\{p, \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2\right\} \\
&= \frac{1}{2m}\underbrace{\left\{p, p^2\right\}}_{=0} + \frac{1}{2}k\left\{p, x^2\right\} \\
&= \frac{1}{2}k\left(\underbrace{\{p, x\}}_{=-1}x + x\underbrace{\{p, x\}}_{=-1}\right) \\
\Rightarrow & \underline{\dot{p} = -kx}
\end{aligned}
$$

Die erste Bewegungsgleichung kann man einmal nach der Zeit differenzieren und in die zweite einsetzen. Damit folgt daraus die Bewegungsgleichung, die man auch für den harmonischen Oszillator erwarten würde.

$$
\ddot{x} = \frac{\dot{p}}{m} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} = -kx
$$

1.3 Harmonischer Oszillator: 2

Gegeben sei die Hamiltonfunktion $H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2$ eines eindimensionalen harmonischen Oszillators.

i.) Berechnen sie die Bewegungsgleichung mittels Hamiltonformalismus.

Lösung:

Zunächst wenden wir die Hamiltonschen Gleichungen an:

$$
\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \tag{1}
$$

$$
\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2 q \tag{2}
$$

aus Gleichung (1) folgt durch Differenziation und einsetzen in Gleichung (2):

$$
\ddot{q} + \omega^2 q = 0 \tag{3}
$$

Die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung hat die Form

$$
q(t) = A\sin(\omega t + \phi_0) \tag{4}
$$

ii.) Skizzieren sie die Phasentrajektorie im Phasenraum (q, p).

Lösung:

Um nun die Phasenkurve zu bekommen, differenzieren wir die erhaltene Bewegungsgleichung und betrachten anschließend den Ausdruck $p^2 + q^2$.

$$\dot{q}(t) = A\omega \cos(\omega t + \phi_0) \tag{5}$$

$$\tag{6}$$

$\Rightarrow p^2 + q^2 = A^2 m^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \phi_0) + A^2 \sin^2(\omega t + \phi_0)$

Betrachten wir nun $p^2 + q^2 \cdot m^2\omega^2$, dann haben wir:

$$p^2 + q^2 \cdot m^2\omega^2 = A^2 m^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \phi_0) + A^2 \sin^2(\omega t + \phi_0) m^2\omega^2 \tag{7}$$

$\Rightarrow p^2 + q^2 \cdot m^2\omega^2 = A^2 m^2 \omega^2 = const.$
Also eine konstanten Ausdruck auf der rechten Seite.(wegen $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$)

Vergleichen wir dies mit der üblichen Darstellung einer Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, so erhalten wir als Phasentrajektorie

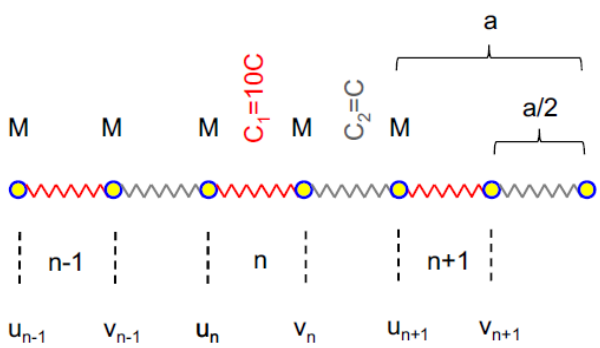
$$\frac{p^2}{Am\omega} + \frac{q^2}{A} = 1 \tag{8}$$

mit den beiden Halbachsen $Am\omega$ und A.

2 Schwingungen

2.1 Lineare Kette aus zweiatomigen Molekülen

Untersuchen Sie die Grundschwingungen einer linearen Kette aus zweiatomigen Molekülen, die aus gleichen Atomen der Masse M bestehen. Der Abstand der Atome im Molekül und der Abstand zwischen den Molekülen soll gleich sein und $a/2$ betragen (siehe Abbildung). Die Wechselwirkung der Teilchen beschreiben wir durch Federn, wobei die Kraftkonstanten zwischen den Atomen desselben Moleküls $C_1 = 10C$ und zwischen Atomen zweier benachbarter Moleküle $C_2 = C$ betragen sollen. Die Kopplung mit übernächsten Nachbarn soll vernachlässigt werden, d.h. ein Teilchen erfährt nur eine Kraft von seinem Vorgänger und Nachfolger. Wir erhalten so eine lineare Kette aus Atomen mit Masse M und Abstand $a/2$, bei der die Federkonstante zwischen den einzelnen Atomen abwechselnd groß und klein ist. Diese Anordnung stellt ein einfaches Modell für einen Kristall aus zweiatomigen Molekülen wie z. B. H_2 dar.



i) Zeigen Sie zunächst mit dem Lagrange-Formalismus, dass für die Bewegungsgleichung des Atoms v_n sowie von u_n gilt:

$$M\ddot{u}_n = C_1(v_n - u_N) + C_2(v_{n-1} - u_n)$$
$$M\ddot{v}_n = C_1(u_n - v_N) + C_2(u_{n+1} - v_n)$$

Lösung:

Wir betrachten eine Kette mit zwei unterschiedlichen Atomen, die allerdings gleiche Masse (M) haben sollen. Dabei sei u_n die Verschiebung des n-ten Atoms der einen Sorte und v_n die Verschiebung des n-ten Atoms der anderen Sorte. Die Lagrangefunktion für u_n ergibt sich wie folgt:

$$\mathcal{L} = \frac{M}{2}\dot{u}_n^2 + C_1/2(v_n - u_n)^2 + C_2/2(v_{n-1} - u_n)^2$$

Anwendung der Euler-Lagrange-Gleichungen liefert schließlich die Bewegungsgleichung.
Für v_n gilt die Vorgehensweise analog.

ii.) Zur Lösung dieses gekoppelten DGL-Systems verwenden Sie bitte den folgenden Ansatz:

$$u_n(t) = u_0 e^{i(qna-\omega t)}$$

$$v_n(t) = v_0 e^{i(qna-\omega t)}$$

Berechnen Sie nun die mögichen Normalschwingungsfrequenzen ω.
Hinweis: Die Beziehung $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{ix}}{2}$ *kann nützlich sein.*
Dieser Ansatz resultiert aus dem Wissen, dass die Kette unendlich ausgedehnt ist un somit der Parameter n als eine Quasiortskoordinate gesehen werden kann. Die Kette ist dann nicht nur eine Schwingung, sonderen eine Art Welle.

Lösung:

Einsetzen ergibt das folgende algebraische Gleichungssystem:

$$C_1(v_0 - u_0) + C_2(v_0 e^{-iqa} + M\omega^2 u_0 = 0)$$

$$C_1(u_0 - v_0) + C_2(u_0 e^{iqa} + M\omega^2 v_0 = 0)$$

Dies ist ein homogenes, lineares Gleichungssystem, für das eine nichttriviale Lösung existiert, wenn die KoeffizientenDeterminante verschwindet, also

$$det \begin{pmatrix} (C_1+C_2) - M\omega^2 & -(C_1 + C_2 e^{-iqa}) \\ -(C_1 + C_2 e^{iqa}) & (C_1+C_2) - M\omega^2 \end{pmatrix} = 0$$

Dies können wir ausmultiplizieren und erhalten

$$[M\omega^2 - (C_1+C_2)]^2 = (C_1 + C_2 e^{-iqa})(C_1 + C_2 e^{iqa}) = C_1^2 + C_2^2 + 2C_1C_2\cos qa$$

$$= C_1^2 + C_2^2 + 2C_1C_2 - 2C_1C_2(1-\cos qa) = (C_1+C_2)^2 - 4C_1C_2\sin^2\frac{qa}{2}$$

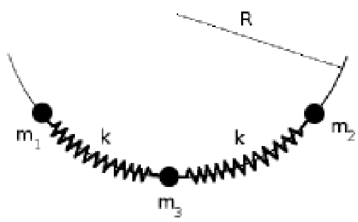
Die beiden Lösungen dieser quadratischen Gleichung lauten

$$\omega_\pm^2 = \frac{C_1+C_2}{M} \pm \frac{1}{M}\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + 2C_1C_2\cos qa}$$

$$= \frac{C_1+C_2}{M} \pm \frac{1}{M}\sqrt{(C_1+C_2)^2 - 4C_1C_2\sin^2\frac{qa}{2}}$$

2.2 Drei Massen auf einem Zylindermantel

Drei Teilchen sind auf einem Zylindermantel mit dem Radius R gebunden. Die Zylinderachse ist senkrecht zu einem homogenen Gravitatationsfeld der Stärke $\vec{g}$ orientiert. Ferner können sich die Teilchen nur senkrecht zur Zylinderachse bewegen. Die Massen der äußeren Teilchen sind identisch und sind mit dem dritten über eine Feder mit der Federkonstanten k verbunden. Ferner ist es den Teilchen erlaubt sich zu durchdringen. Legen Sie das Koordinatensystem so, dass der Mittelpunkt auf der Zylinderachse sitzt, und diese in z-Richtung weist. Der Winkel θ_i soll der Winkel zwischen der Gleichgewichtslage und dem Ortsvektor des i-ten Teilchens sein.



Beschreiben Sie das Problem mit dem Lagrangeformalismus und finden Sie die Normalmoden und die entsprechenden Schwingungsfrequenzen des Systems. Betrachten Sie hierbei nur den Fall, dass sich die Massen nahe am unteren Punkt befinden. Skizzieren Sie die Normalmoden.

Lösung:

Im folgenden sollen die Achse eines kartesischen Koordinatensystems so orientiert werden, dass die Zylinderachse entlang der z-Achse und die Gravitation in negative y-Richtung zeigt. Die Position eines Teilchens ist daher durch die Koordinaten

$$(x_i, y_i) = R(\sin\theta_i, 1 - \cos\theta_i)$$

gegeben. Zur Konstruktion einer Lagrangefunktion für dieses System soll zuerst die kinetische Energie der Teilchen bestimmt werden. Das mittlere Teilchen habe dazu die Masse M haben und die beiden äußeren die Masse m. Die kinetische Energie ergibt sich zu:

$$T = \frac{m}{2}\left(R^2\dot{\theta}_1^{\,2} + R^2\dot{\theta}_2^{\,2}\right) + \frac{M}{2}R^2\dot{\theta}_3^{\,2}$$

Teilchen 1 und 2 sind hierbei die äußeren Teilchen. Die Potentielle Energie errechnet sich aus dem Abstand $R(\theta_i - \theta_j)$ zwischen den Teilchen. Da die äußeren Teilchen nur mit dem mittleren verbunden sind, folgt:

$$\begin{aligned} U &= \frac{kR^2}{2}\left((\theta_1-\theta_3)^2 + (\theta_2-\theta_3)^2\right) - mgR\left(\cos\theta_1 + \cos\theta_2 - 2\right) + MgR(1-\cos\theta_3) \\ &\approx \frac{kR^2}{2}\left((\theta_1-\theta_3)^2 + (\theta_2-\theta_3)^2\right) + \frac{1}{2}mgR\left(\theta_1^2+\theta_2^2\right) + \frac{1}{2}MgR\theta_3^2 \end{aligned}$$

Die Lagrangefunktion ist nun $\mathcal{L} = T - U$ und die Bewegungsgleichungen ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} mR^2\ddot{\theta}_1 &= -kR^2(\theta_1-\theta_3) - mgR\theta_1 \\ mR^2\ddot{\theta}_2 &= -kR^2(\theta_2-\theta_3) - mgR\theta_2 \\ MR^2\ddot{\theta}_3 &= -kR^2(2\theta_3-\theta_1-\theta_2) - MgR\theta_3 \end{aligned}$$

In Matrixform lauten diese Bewegungsgleichungen:

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k-\frac{mg}{R} & 0 & k \\ 0 & -k-\frac{mg}{R} & k \\ k & k & -2k-\frac{Mg}{R} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

Der Ansatz $\theta_i = A_i\exp(-i\omega t)$ führt auf das Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} k+\frac{mg}{R}-m\omega^2 & 0 & -k \\ 0 & k+\frac{mg}{R}-m\omega^2 & -k \\ -k & -k & 2k+\frac{Mg}{R}-M\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = 0$$

Offenbar sind nur dann nicht-triviale Lösungen möglich, wenn die Matrix singulär wird. Dies ist beispielsweise dann erfüllt, wenn deren Determinante verschwindet. Nach einer entsprechenden Rechnung folgt, dass

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{g}{R} + \frac{k}{m} \\ \omega_{2,3}^2 &= \frac{g}{R} + \frac{k}{2m} + \frac{k}{M} \pm k\sqrt{\frac{1}{4m^2} + \frac{1}{mM} + \frac{1}{M^2}} \end{aligned}$$

Die entsprechenden Eigenvektoren ergeben sich zu:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} - \frac{m}{M} - m\sqrt{\frac{1}{4m^2} + \frac{1}{mM} + \frac{1}{M^2}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} - \frac{m}{M} + m\sqrt{\frac{1}{4m^2} + \frac{1}{mM} + \frac{1}{M^2}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Normalmoden ergeben sich für ω_1 als Schwingung, bei der die äußeren Massen gegenphasig schwingen und die mittlere ruht, sowie ω_2 als Schwingung, bei der eine beide äußere Massen in Phase schwingen und die mittlere gegenphasig, und für ω_3 als gleichphasige Schwingung aller Teilchen.