FAKULTÄT FÜR PHYSIK | TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Michael Schrapp

Vorlesung

Ferienkurs *Theoretische Mechanik 2009*

Hamilton Formalismus und gekoppelte Systeme

Inhaltsverzeichnis

1 Hamilton-Formalismus

1.1 Hamilton-Funktion

Ausgangspunkt für die Hamilton-Funktion ist nun die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}$. Die Hamilton-Funktion $\mathcal{H}$ ist nun als die Legendre-Transformierte[1] der Lagrangefunktion bezüglich der Geschwindigkeiten $\dot{q}_i$ definiert, d.h.

$$\mathcal{H}(q,p,t) := L[\mathcal{L}] = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L}\left(q, \dot{q}, t\right) \tag{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{H}(q,p,t) := \sum_i \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}(q,\dot{q},t)} \tag{3}$$

wobei wir hier den kanonischen Impuls $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ verwendet haben (siehe Vorlesung am Dienstag).

Beispiel: freies Teilchen

($V \equiv 0$):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = T$$

$$\Rightarrow \ p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \ \Rightarrow \ \dot{x} = \frac{p_x}{m}; \quad \dot{y} = \frac{p_y}{m}; \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \sum_{i=1}^{3} p_i \dot{q}_i - L \\
&= \frac{1}{m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) - \frac{1}{2} m \left(\left(\frac{p_x}{m}\right)^2 + \left(\frac{p_y}{m}\right)^2 + \left(\frac{p_z}{m}\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)
\end{aligned}$$

Oder in kurz:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2$$

$$\vec{p} = \nabla_{\dot{\vec{x}}} \mathcal{L} = m\dot{\vec{x}} \Rightarrow \dot{\vec{x}} = \frac{\vec{p}}{m}$$

$$\mathcal{H} = \vec{q} \cdot \vec{p} - \mathcal{L} = \frac{\vec{p}^2}{m} - \frac{1}{2} m \left(\frac{\vec{p}}{m}\right)^2 = \frac{\vec{p}^2}{2m} \tag{4}$$

An dieser Stelle eine wichtige Bemerkung zur Vermeidung eines häufigen Fehlers: **Die Hamiltonfunktion darf keine Geschwindigkeiten enthalten!** Die konjugierten Impulse müssen nach den Geschwindigkeiten explizit aufgelöst werden und diese dann in die Definition der Hamiltonfunktion *und* in die Lagrangefunktion eingesetzt werden.

[1] Die Transformation einer Funktion:

$$L\left[f\right](x) := x\frac{\partial f}{\partial x} - f\left(x\right) \tag{1}$$

Heißt *Legendre-Transformation.* Sie ist insbesondere für Variablentransformationen in der Mechanik und Thermodynamik nützlich. Bei der Legendre-Transformation transformiert man lediglich die Variablen einer Funktion, z.B. von zwei Argumenten x, y zu den neuen Argumenten $\frac{\partial f}{\partial x}, y$.

1.2 Hamiltonsche Bewegungsgleichungen

Wir haben jetzt ein System in einem $p \times q$ Raum zu beschreiben. Dieser wird als *Phasenraum* bezeichnet. Die Lagrangefunktion wurde im Ortsraum über die Euler-Lagrange-Gleichungen gelöst, wie schaut nun die Analogie im Phasenraum der Hamiltonmechanik aus? Wir suchen also Bestimmungsgleichungen für p und q, sie lauten (ohne Herleitung):

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} && (5) \\ -\dot{p}_i &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} && (6) \\ -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} && (7) \end{aligned}}$$

Diese Gleichungen heißen *kanonische Gleichungen* oder *Hamiltonsche Bewegungsgleichungen.*
Zunächst müssen also 2n DGLs erster Ordnung gelöst werden, um darauf die Impulse in die verallgemeinerten Orte einzusetzen, erst dann ist das Problem im Ortsraum gelöst. Die kanonischen Gleichungen sind im übrigen völlig äquivalent zu den Euler-Lagrange-Gleichungen.

Außerdem ist die Lagrangefunktion die Legendre-Transformation der Hamiltongleichung nach $\mathbf{p}$,

$$\mathcal{L} = \sum_i \dot{q}_i p_i - \mathcal{H}$$

$$\mathcal{L} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} p_i - \mathcal{H} \tag{8}$$

Daraus folgt: Die Lagrange-Funktion und die dazugehörige Hamilton-Funktion gehen ineinander durch Legendre-Transformationen über.

Nur muss bei der Rücktransformation natürlich der Impuls wieder durch die Geschwindigkeiten ausgedrückt werden.

1.3 Hamiltonfunktion, Energie und Zeitabhängigkeit

Für einige Fälle kann die Hamiltonfunktion eine besonders einfache Gestalt annehmen und wir können uns die umständliche Umrechnerei über die Lagrangefunktion sparen.

Für **nicht explizit zeitabhängige** Zwangsbedingungen und ein **geschwindigkeits*un*abhängiges** Potential gilt für die Hamilton-Funktion:

$$\underline{\mathcal{H} = T + V = E} \tag{9}$$

Die Hamiltonfunktion ist in diesem Fall die Gesamtenergie, ausgedrückt in $\mathbf{q}$, $\mathbf{p}$ und t. Die Berechnung fällt dann im Wesentlichen darauf zurück die kinetische Energie in Impulse auszudrücken, wie im Beispiel des freien Teilchens von vorher:

$$\vec{p} = m\dot{\vec{x}}; \qquad T = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2$$

$$\mathcal{H} = T(\vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m}$$

Wir bestimmen nun die totale Zeitableitung der Hamiltonfunktion mit der Kettenregel im Mehrdimensionalen. :

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{H}(p_i, q_i, t)}{dt} &= \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \\
&=^{(*)} \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \\
&\Rightarrow \quad \frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}
\end{aligned} \tag{10}$$

Wobei wir im Schritt (*) die Hamilton-Bewegungsgleichungen eingesetzt haben.
Folglich ist die Hamilton-Funktion genau dann eine Erhaltungsgröße , wenn $\mathcal{H}$ und $\mathcal{L}$ nicht explizit von der Zeit abhängen. Das heißt, dass wenn $\mathcal{H} = E$ gilt, die Energie genau dann erhalten ist, wenn $\mathcal{H}$ nicht explizit von der Zeit abhängig ist. Allerdings sind die Identifizierung von $\mathcal{H}$ als Energie und als Erhaltungsgröße zwei unterschiedliche Dinge und hängen *nicht* zusammen:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0 \;\not\Leftrightarrow\; \mathcal{H} = E \tag{11}$$

Hier noch eine kleine hilfreiche Tabelle der kinetischen Energie für ein freies Teilchen, abhängig von den Impulsen in verschiedenen Koordinaten:

Kartesiche Koordinaten	$T = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right)$
Zylinderkoordinaten	$T = \frac{1}{2m}\left(p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2} + p_z^2\right)$
Kugelkoordinaten	$T = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 sin^2(\vartheta)}\right)$

1.4 Poisson-Klammern

Poisson-Klammern erscheinen einigen von euch möglicherweise als nur eine weitere Definition, ja gar überflüssig. Die Hamiltonsche Mechanik geht aber noch über diese kleine Zusammenfassung hinaus. Die Poissonklammern spielen eine wichtige Rolle bei erweiterten Transformationen der Koordinaten und bilden die Grundlage für das sogenannte Heisenbergbild in der Quantenmechanik.

Also: Eine Funktion f(q,p,t) auf den Phasenraum nennen wir *Observable.* Wollen wir also jene irgendeine Funktion im Laufe der Zeit darstellen, bietet es sich an die totale Zeitableitung zu bilden:

$$\frac{df}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Mit den kanonischen Gleichungen kommen wir auf:

$$\frac{df}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \tag{12}$$

Mit der für zwei Observablen ($\mathcal{H}$ ist eine Observable!) definierten *Poisson-Klammer* wird die Gleichung äußerlich einfacher:

$$\{f, g\}_{q,p} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \tag{13}$$

$$\frac{df}{dt} = \{f, \mathcal{H}\} + \frac{\partial f}{\partial t} \tag{14}$$

Die Indizes werden meist nicht mitgeschrieben, da gewöhnlich klar ist, wonach abgeleitet wird. Die Gleichung (21) verdeutlicht, dass die zeitliche Ableitung einer Observablen von der Hamilton-Funktion gesteuert wird. Erhaltungssätze können wir jetzt durch die Poisson-Klammern ausdrücken. Eine Observable ist genau dann erhalten, wenn:

$$\{f, \mathcal{H}\} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \tag{15}$$

Wichtige Eigenschaften der Poisson-Klammern kann man aus der Definition gewinnen:

Antisymmetrie	$\{f, g\} = -\{g, f\}$
Linearität	$\{\lambda f + g, h\} = \lambda \{f, h\} + \{g, h\}$
Produktregel	$\{f, gh\} = \{f, g\} h + g \{f, h\}$
fundamentale Poisson-Klammern	$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = \{f, f\} = 0 \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$
kanonische Gleichungen	$\dot{q}_i = \{q_i, \mathcal{H}\} \quad \dot{p}_i = \{p_i, \mathcal{H}\}$

In Aufgaben genügt es meist verschiedene der oberen Eigenschaften anzuwenden ohne gar die Klammer explizit ausrechnen zu müssen. Weiters dazu in den Übungen.

1.5 Kanonische Transformationen

Wir wollen hier nur ganz kurz die Definition einer kanonischen Transformationen behandeln: Eine Transformation

$$p \to \tilde{p}$$
$$q \to \tilde{q}$$

heißt kanonisch, falls die üblichen Vertauschungsrelationen gelten:

$$\{\tilde{q}_i, \tilde{p}_j\} = \delta_{ij}$$
$$\{\tilde{q}_i, \tilde{q}_j\} = \{\tilde{p}_i, \tilde{p}_j\} = 0$$

1.6 Das "Kochrezept"

Die Lösung von mechanischen Problemen mit dem Hamilton-Formalismus geht also nach folgendem Schema:

- Aufstellen der Lagrange-Funktion
- Berechnung der konjugierten Impulse p_i
- Diese Impulsgleichung nach den Geschwindigkeiten $\dot{q}_i$ auflösen
- Die Hamiltonfunktion aufstellen und die $\dot{q}_i$ aus der Funktion mit der Impulsgleichung eliminieren:

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) := \sum_i \dot{q}_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)\, p_i - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), t)$$

- In vielen Fällen aber einfach nur:

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) := T(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + V(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$$

(Siehe "Hamiltonfunktion, Energie und Zeitabhängigkeit")

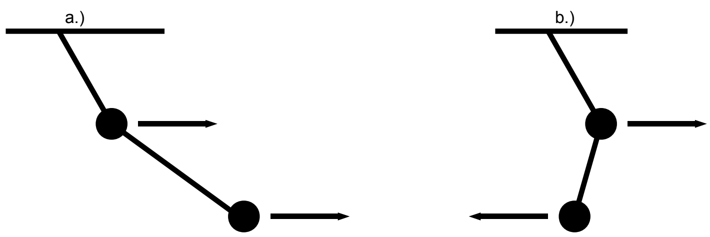

Abbildung 1: a.) Schwingungsmode für ω_1 (gleichphasige Schwignung) b.) Schwingungsmode für ω_2 (gegenphasige Schwingung)

2 gekoppelte Systeme

In diesem Abschnitt stellen wir eine Methode vor, gekoppelte Systeme, also Systeme mit mehreren Variablen und mehreren Gleichungen, zu lösen. Wir werden dies anhand eines konkreten Beispiels machen. Dazu setzten wir die folgenden Bewegungsgleichungen für θ_1 und θ_2 als gegeben voraus und berechnen nun die Normalfrequenzen, Normalkoordinaten und Moden.
Es seien also folgende Bewegungsgleichungen gegeben:

$$\frac{4}{3}ml^2\ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2}\ddot{\theta}_2 = -\frac{3mgl}{2}\theta_1$$
$$\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta}_2 + \frac{1}{2}\ddot{\theta}_1 = -\frac{mgl}{2}\theta_2$$

In Matrixform lautet das Problem:

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}^{T} \begin{pmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} \frac{-2g}{l} & 0 \\ 0 & \frac{-2g}{l} \end{pmatrix}}^{V} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

Also gilt es, das Problem $T\ddot{\phi} - V\phi = 0$ zu lösen.
Dazu können wir den Ansatz

$$\phi(t) = \phi_0 e^{i\omega t}, \phi_0 = \begin{pmatrix} \phi_{01} \\ \phi_{02} \end{pmatrix}$$

versuchen. Eingesetzt ergibt sich:

$$-\omega^2 T\phi_0 - V\phi_0 = 0$$

$$\rightarrow \overbrace{\begin{pmatrix} -2\omega^2 + \frac{2g}{l} & -\omega^2 \\ -\omega^2 & -\omega^2 + \frac{2g}{l} \end{pmatrix}}^{A} \begin{pmatrix} \phi_{01} \\ \phi_{02} \end{pmatrix} = 0$$

Dies stellt ein gewöhnliches, lineares Gleichungssystem dar. Es ist eindeutig lösbar, falls die Determinante der Matrix A gleich Null ist. Die Berechnung der Determinante liefert:

$$\omega^4 - 4\frac{g}{l}\omega^2 + 2\frac{g^2}{l^2} = 0$$

Als Lösung dieser Gleichung in ω^2 bekommen wir die beiden Lösungen:

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l}(2+\sqrt{2}), \omega_2^2 = \frac{g}{l}(2-\sqrt{2})$$

Dies sind die Normalfrequenzen (Normalmoden), bzw. die Quadrate davon (siehe Diagramm 1)

Setzt man die Lösung für ω^2 in die Matrix A ein, so können wir die Vektoren ϕ_0 des Gleichungssystems bestimmen. Dabei bekommen wir für ω_1^2:

$$\phi_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Und für ω_2^2:

$$\phi_0^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Die Normierung dieser Eigenvektoren liefert:

$$(\phi_0^{(1)})_n = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$(\phi_0^{(2)})_n = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Um nun zu den sogenannten Normalkoordinaten zu kommen, definieren wir die Matrix B, die aus den normierten Eigenvektoren besteht:

$$B = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Die Normalkoordinaten ergeben sich zu:

$$n = B\phi$$

$$\begin{pmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow n_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\phi_1 + \phi_2)$$

$$n_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\phi_1 - \phi_2)$$

In diesen neuen Koordinaten n_1 und n_2 entkoppeln nun die Bewegungsgleichungen und wir erhalten 2 unabhängige Bewegungsgleichungen, die wir wie gewohnt lösen können. Wir bekommen diese, indem wir für ϕ_1 und ϕ_2 die neuen Koordianten einsetzen. Wir wollen dies jedoch nicht durchführen, sondern die Lösung unserers ursprünglichen Systems allgemein angeben. Dazu setzen wir unsere Ergebnisse in den gemachten Ansatz $\phi(t) = \phi_0 e^{i\omega t}$ ein.

$$\phi_1(t) = \phi_{01}^{(1)} e^{i\omega_1 t} + \phi_{01}^{(2)} e^{i\omega_2 t}$$

$$= e^{i\sqrt{\frac{g}{l}(2+\sqrt{2})}t} + e^{i\sqrt{\frac{g}{l}(2-\sqrt{2})}t}$$

$$\phi_2(t) = \phi_{02}^{(1)} e^{i\omega_1 t} + \phi_{02}^{(2)} e^{i\omega_2 t}$$

$$= -\sqrt{2}e^{i\sqrt{\frac{g}{l}(2+\sqrt{2})}t} + \sqrt{2}e^{i\sqrt{\frac{g}{l}(2-\sqrt{2})}t}$$