Übungen zur Lagrangeschen Mechanik und den Starren Körpern

Ari Wugalter

23. September 2009

1 Lineares dreiatomiges Molekül

Lösung

(a) Wir wählen als generalisierte Koordinaten die Auslenkungen der Massen aus der Ruhelage. Dann gilt

$$\begin{aligned}
T &= m\dot{x}_1^2 + M\dot{x}_2^2 + m\dot{x}_3^2 \\
U &= k(x_2 - x_1)^2 + k(x_3 - x_2)^2 \\
\Rightarrow L &= m\dot{x}_1^2 + M\dot{x}_2^2 + m\dot{x}_3^2 - k(x_2 - x_1)^2 - k(x_3 - x_2)^2.
\end{aligned}$$

Mit der Lagrangefunktion können wir die Euler-Lagrange Gleichungen aufstellen.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) &= m\ddot{x}_1 & \frac{\partial L}{\partial x_1} &= -2k(x_1 - x_2) \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) &= M\ddot{x}_2 & \frac{\partial L}{\partial x_2} &= -2k(2x_2 - x_1 - x_3) \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3}\right) &= m\ddot{x}_3 & \frac{\partial L}{\partial x_3} &= -2k(x_3 - x_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow m\ddot{x}_1 = -2kx_1 + 2kx_2 + 0x_3 \\
&\Rightarrow M\ddot{x}_1 = 2kx_1 - 4kx_2 + 2kx_3 \\
&\Rightarrow m\ddot{x}_1 = 0x_1 + 2kx_2 + -2kx_3
\end{aligned}$$

$$\iff \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2k & -2k & 0 \\ -2k & 4k & -2k \\ 0 & -2k & 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

(b) Die Eigenfrequenzen bekommen wir durch die Gleichung $\det(K - \omega^2 M) = 0$.

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} 2k - \omega^2 m & -2k & 0 \\ -2k & 4k - \omega^2 M & -2k \\ 0 & -2k & 2k - \omega^2 m \end{pmatrix} &= 0 \\
\iff (2k - \omega^2 m)[(2k - \omega^2 m)(4k - \omega^2 M) - 8k^2] &= 0 \\
\iff (2k - \omega^2 m)[\omega^4 mM - (2kM + 4km)\omega^2] &= 0 \\
\iff \omega^2 \left(\omega^2 - \frac{2k}{m}\right)\left(\omega^2 - \left(\frac{2k}{m} + \frac{4k}{M}\right)\right) &= 0 \\
\Rightarrow \omega_1 = 0; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}; \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{2k}{m} + \frac{4k}{M}};
\end{aligned}$$

Die dazugehörenden Vektoren erhalten wir als Lösungen des Gleichungssystems $(K - \omega^2 M)\vec{v} = 0$.
Für $\omega_1 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 2k & -2k & 0 \\ -2k & 4k & -2k \\ 0 & -2k & 2k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diese Normalschwingung entspricht der parallelen linearen Translation aller drei Massen.
Für $\omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2k & 0 \\ -2k & 4k - 2k\frac{M}{m} & -2k \\ 0 & -2k & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow\Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bei dieser Normalschwingung ist die mittlere Masse in Ruhe, und die beiden äußeren schwingen gegenphasig.
Für $\omega_3 = \sqrt{\frac{2k}{m} + \frac{4k}{M}}$:

$$\begin{pmatrix} -4k\frac{m}{M} & -2k & 0 \\ -2k & -2k\frac{M}{m} & -2k \\ 0 & -2k & -4k\frac{m}{M} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2\frac{m}{M} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2\frac{m}{M} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2\frac{m}{M} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} M \\ -2m \\ M \end{pmatrix}$$

Die letzte Normalschwingung, entspricht einer Bewegung der mittleren Masse in Gegenrichtung von den beiden anderen, die parallel schwingen.

2 Trägheitstensoren

Lösung

(a) Die Momente zu den Achsen in der Ebene des Quadrats sind offensichtlich alle gleich. Die Atome haben die Koordinaten $(\pm\frac{a}{2}|\pm\frac{a}{2}|0)$. Also ist

$$I_{11} = I_{22} = 4m \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = ma^2$$

$$I_{33} = 4 \cdot m \cdot \left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right) = 2ma^2$$

$$\Rightarrow I = ma^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Die Stiftmine hat keine Trägheit um ihre eigene Achse ($I_{11} = 0$), weil der Abstand aller Massen zur Drehachse null ist. Die Momente um alle zur Mine senkrechten Achsen sind gleich (Symmetrie).

$$I_{22} = I_{33} = \int_{\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{M}{l} x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{12} ml^2$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{12} ml^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Die Symmetrien liegen hier wieder analog zum Quadrat. Wir integrieren in Polarkoordinaten:

$$I_{11} = I_{22} = \int_{r_i}^{r_a} \int_0^{2\pi} \frac{M}{\pi(r_a^2 - r_i^2)} \cdot r^2 \sin^2\phi \; r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}r = \frac{1}{8} M \frac{r_a^4 - r_i^4}{r_a^2 - r_i^2}$$

$$I_{33} = \int_{r_i}^{r_a} \int_0^{2\pi} \frac{M}{\pi(r_a^2 - r_i^2)} \cdot r^3 \mathrm{d}\phi\mathrm{d}r = \frac{1}{4} M \frac{r_a^4 - r_i^4}{r_a^2 - r_i^2}$$

(d) Der Vollzylinder hat ähnliche Symmetrieeigenschaften, wie die CD.

$$I_{11} = I_{22} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{M}{\pi R^2 h} (r^2 \cos^2\phi + z^2) \; r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}r\mathrm{d}z = \frac{1}{4} MR^2 + \frac{1}{12} Mh^2 \tag{1}$$

$$I_{33} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{M}{\pi R^2 h} r^3 \mathrm{d}\phi\mathrm{d}r\mathrm{d}z = \frac{1}{2} MR^2 \tag{2}$$

$$\Rightarrow I = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}Mh^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}Mh^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}MR^2 \end{pmatrix}.$$

3 Zylinder in Kugelschale

Lösung

(a) Für einen Hohlzylinder eignen sich logischerweise Zylinderkoordinaten.

$$I = \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{M}{2\pi Rh}(R^2 \sin^2\phi + R^2\cos^2\phi + z^2 - z^2)R \; \mathrm{d}\phi \mathrm{d}z = MR^2.$$

(b) Offensichtlich gilt für die Geschwindigkeit des Schwerpunkts des Zylinders $v_s = (R-a)\cdot\dot{\phi}$. Andererseits gilt die Rollbedingung $v_s = \omega \cdot a$. Somit können wir alle wichtigen kinematischen Größen durch ϕ ausdrücken:

$$v_s = (R-a)\cdot\dot{\phi}; \quad \omega = \frac{v_s}{a} = \frac{(R-a)}{a}\cdot\dot{\phi}$$

Somit erhalten wir

$$T = \frac{m}{2}v_s^2 + \frac{I}{2}\omega^2 = \frac{1}{2}m(R-a)^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}ma^2\left(\frac{R-a}{a}\right)^2\dot{\phi}^2 = \\ = m(R-a)^2\dot{\phi}^2$$

$$U = -mgz = -mg(R-a)\cos\phi$$
$$\Rightarrow L = m(R-a)^2\dot{\phi}^2 + mg(R-a)\cos\phi$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}\right) = 2m(R-a)^2\ddot{\phi} \qquad \frac{\partial L}{\partial\phi} = -mg(R-a)\sin\phi$$

$$\Rightarrow 2m(R-a)\ddot{\phi} + mg\sin\phi = 0$$

4 Hulla-Hupp-Reifen

Lösung

(a) Es ist sinnvoll zuerst den Trägheitstensor um den Schwerpunkt auszurechnen und dann den Drehpunkt in den Aufhängepunkt zu verschieben. Aufgrund der Symmetrie gilt $I_{11} = I_{33}$. Also können wir in Polarkoordinaten berechnen:

$$I_{11} = I_{33} = \int_0^{2\pi} \frac{M}{2\pi R}(R^2\sin^2\phi) \; R\mathrm{d}\phi = \frac{1}{2\pi}MR^2\cdot\pi = \frac{1}{2}MR^2$$
$$I_{22} = \int_0^{2\pi}\frac{M}{2\pi R}R^2\cdot R\mathrm{d}\phi = MR^2.$$

$$\Rightarrow I^{(S)} = MR^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jetzt verschieben wir den Drehpunkt mit dem Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix}$ an den Aufhängepunkt und erhalten:

$$I^{(A)} = I^{(S)} + MR^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = MR^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Aufgrund der Rotationssymmetrie des Systems um die z-Achse ist die z-Komponente des Drehimpuls eine Erhaltungsgröße. Außerdem bleibt noch die Energie erhalten (Symmetrie in der Zeit).

(c) Schwingungen um den Ursprung in xz-Ebene entsprechen einer Rotation um die y-Achse. Sei ϕ der Drehwinkel um den Aufhängepunkt. Wir können die Lagrangrangefunktion aufstellen:

$$T = T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_{22} \dot{\phi}^2 = \frac{3}{2} MR^2 \dot{\phi}^2 \qquad U = -MgR\cos\phi$$

$$\Rightarrow L = \frac{3}{2} MR^2 \dot{\phi}^2 + MgR\cos\phi \approx \frac{3}{2} MR^2 \dot{\phi}^2 + MgR\left(1 - \frac{\phi^2}{2}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) = 3MR^2 \ddot{\phi} \qquad \frac{\partial L}{\partial \phi} = -MgR\phi$$

$$\Rightarrow \ddot{\phi} + \frac{g}{3R}\phi = 0$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist allgemein bekannt. Mit den Anfangswerten kommt heraus, dass

$$\phi(t) = \phi_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{3R}} t\right).$$

5 Halbkugel auf Ebene

Lösung

(a) Offensichtlich ist es deutlich einfacher zuerst das Trägheitsmoment durch eine parallel Achse durch den Ursprung zu berechnen und sie dann mit Satz von Steiner zu verschieben. Wegen der Symmetrie dürfen wir die Achse beliebig in der Ebene des Querschnitts der Halbkugel wählen. Legen wir das Koordinatensysten, so dass die Symmetrieachse die x- Acshe ist.

$$I_Z = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M}{\frac{2}{3}\pi R^3}(r^2 \sin^2\theta \sin^2\phi + r^2 \sin^2\theta \cos^2\phi) r^2 \sin\theta \ \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi \mathrm{d}r =$$
$$\frac{M}{\frac{2}{3}\pi R^3} \int_0^R r^4 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta \ \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi \mathrm{d}r = \frac{M}{\frac{2}{3}\pi R^3} \cdot \frac{R^5}{5} \cdot 2\pi \cdot \int_{-1}^1 1 - x^2 \ \mathrm{d}x =$$
$$= \frac{2}{5} M R^2$$

Jetzt können wir davon den Steiner-Term abziehen und bekommen:

$$I_Z^{(\mathrm{S})} = \frac{2}{5} M R^2 - M \left(\frac{3}{8} R\right)^2 = \frac{83}{320} M R^2$$

(b) Durch Kosinussatz im Dreieck $\triangle OSA$ erhalten wir den Abstand zwischen dem Schwerpunkt und dem Auflagepunkt zu

$$d^2 = R^2 + \left(\frac{3}{8} R\right)^2 - \frac{3}{4} R^2 \cdot \cos\phi = R^2 \left(\frac{73}{64} - \frac{3}{4}\cos\phi\right).$$

Also kriegen wir mit Satz von Steiner für den Trägheitstensor am Auflagepunkt

$$I_A = I^{(\mathrm{S})} + M d^2 = \left(\frac{7}{5} - \frac{3}{4}\cos\phi\right) M R^2$$

(c) Die Halbkugeln bewegt sich ohne zu rutschen, d.h. der Auflagepunkt hat keine Translationsenergie. Folglich

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{5} - \frac{3}{4}\cos\phi\right) M R^2 \cdot \dot{\phi}^2 \approx \frac{1}{2}\left(\frac{7}{5} - \frac{3}{4}\left(1 - \frac{\phi^2}{2}\right)\right) M R^2 \cdot \dot{\phi}^2$$
$$U = -\frac{3}{8} M g R \cos\phi \approx -\frac{3}{8} M g R \left(1 - \frac{\phi^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{5} - \frac{3}{4}\underbrace{\left(1 - \frac{\phi^2}{2}\right)}_{\approx 1}\right) M R^2 \cdot \dot{\phi}^2 + \frac{3}{8} M g R \left(1 - \frac{\phi^2}{2}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) = \frac{13}{20} M r^2 \ddot{\phi} \qquad \frac{\partial L}{\partial \phi} = -\frac{3}{8} M g R \phi$$

$$\Rightarrow \ddot{\phi} + \underbrace{\frac{15}{26}\frac{g}{R}}_{\omega^2}\phi = 0$$

Die Halbkugel führt also einen Pendelbewegung mit $\omega = \sqrt{\frac{15}{26}\frac{g}{R}}$ durch.