Übungen zu Lagrange-Formalismus und kleinen Schwingungen

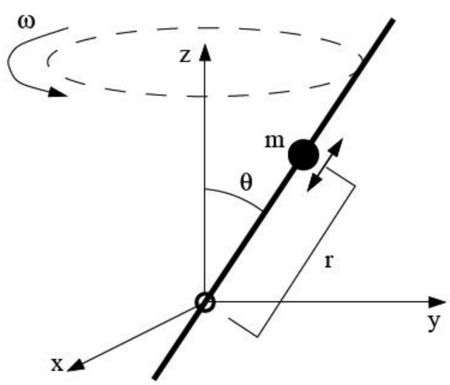
Jonas Probst

22.09.2009

1 Teilchen auf der Stange

Aufgabe:

Ein Teilchen der Masse m wird durch eine Zwangskraft auf einer masselosen Stange gehalten, auf der es sich reibungsfrei bewegen kann. Die Stange rotiert in einem festen Winkel θ zur z-Achse mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω. Es wirken *keine weiteren Kräfte*!



1. Leiten Sie die Lagrange-Funktion des Teilchens explizit in Kugelkoordinaten her.

2. Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für den Radius $r(t)$ des Teilchens aus der Lagrange-Funktion und lösen Sie diese mit den Anfangsbedingungen $r(0) = r_0$ und $\dot{r}(0) = 0$. Skizzieren Sie die Bewegung des Teilchens.

Lösung:

1. Kinetische Energie in Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\sin^2(\theta)\dot{\phi}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \\ &= \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\sin^2(\theta)\omega^2) \end{aligned}$$

   Potentielle Energie (es wirken keine Kräfte!):

$$U = 0$$

$$\Rightarrow \qquad L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\sin^2(\theta)\omega^2)$$

2. Bewegungsgleichung für $r(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot{r} - mr\sin^2(\theta)\omega^2 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \ddot{r} - \omega^2\sin^2(\theta)r = 0$$

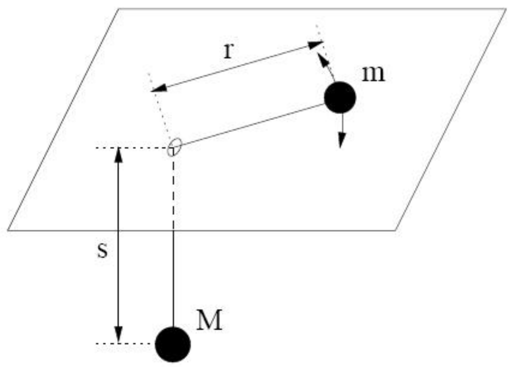
$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad r(t) &= r(0)\cosh\left(\omega\sin(\theta)t\right) + \frac{\dot{r}(0)}{\omega\sin(\theta)}\sinh\left(\omega\sin(\theta)t\right) \\ &= r_0\cosh\left(\omega\sin(\theta)t\right) \end{aligned}$$

   Das Teilchen bewegt sich sich auf einer Spiralbahn bei festem Azemutwinkel θ mit exponentiell wachsendem Radius $r(t)$.

2 Verbundene Massenpunkte

Aufgabe:

Zwei Massenpunkte m und M sind durch einen masselosen Faden der konstanten Länge $l = r + s$ verbunden. Die Masse kann an dem Faden (mit der variierenden Teillänge r) auf der Ebene rotieren. Der Faden führt durch ein Loch in der Ebene zu M, wobei die Masse m an dem straff gespannten Faden (mit der ebenfalls variierenden Teillänge $s = l - r$) hängt.



1. Stellen Sie die Lagrange-Funktion des Systems in geeigneten Koordinaten auf.

2. Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen und Bewegungskonstanten. Geben Sie an, unter welchen Bedingungen M nach oben oder unten beschleunigt wird.

Lösung:

1. Wir wählen als generalisierte Koordinaten die Länge r und den Winkel ϕ, den das Seilstück von m auf der Ebene mit einer festen Grade, die in der Ebene liegt, einschließt.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad T &= \frac{M}{2}\dot{s}^2 + \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) \\ &= \frac{M}{2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(l-r)\right)^2 + \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) \\ &= \frac{m+M}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}r^2\dot{\phi}^2 \end{aligned}$$

Den Nullpunkt des Gravitationspotentials legen wir in die Ebene:

$$\Rightarrow \qquad U = -Mgs = Mg(r-l)$$

Daraus ergibt sich die Lagrange-Funktion des Systems:

$$L = T - U = \frac{M+m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}r^2\dot{\phi}^2 - Mg(r-l)$$

2. $\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \Leftrightarrow \phi$ zyklische Koordinate $\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi}$ ist Erhaltungsgröße (Drehimpuls von m in der Ebene).

   Bewegungsleichung für r:

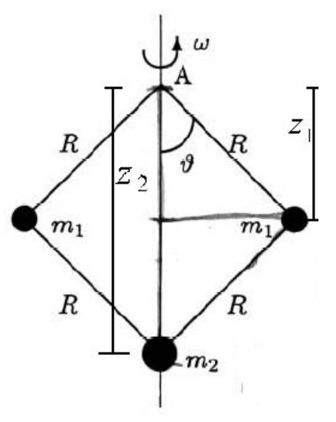
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = (M+m)\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 + Mg = 0$$

   $\Rightarrow M$ wird nach oben beschleunigt $\Leftrightarrow \ddot{r} > 0 \Leftrightarrow mr\dot{\phi}^2 > Mg$ (die Fliehkraft von m muss größer sein als die Gewichtskraft von M)

3 Fliehkraftregler

Aufgabe:

Gegeben Sei das in der Abbildung skizzierte System. Ein Punkt m_2 bewege sich entlang der vertikalen Achse und ist durch masselose Stange der Länge R mit zwei Massen m_1 verbunden. Das System ist durch zwei weitere masselose Stangen der Länge R am Punkt A aufgehängt und dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die die Achse. Die Massenpunkte unterliegen der Schwerkraft.



1. Wählen Sie als generalisierte Koordinate ϑ. Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion des Systems.

2. Sei nun $m_2 = 0$. Zeigen Sie, dass ϑ der Bewegungsgleichung

$$\ddot{\vartheta} = \left(\omega^2 \cos(\vartheta) - \frac{g}{R}\right)\sin(\vartheta)$$

   genügt.

3. Welche Bedingung muss die Winkelgeschwindigkeit ω erfüllen, damit sich der Fliehkraftregler aufstellt, d.h. dass $\vartheta = 0$ instabil gegenüber kleinen Auslenkungen ist. Entwickeln Sie dazu die Bewegungsgleichung um $\vartheta = 0$ bis zur zweiten Ordnung.

Lösung:

1. Es gilt: $z_1 = R\cos(\vartheta)$, $z_2 = 2R\cos(\vartheta) \Rightarrow \dot{z}_2 = -2R\dot{\vartheta}\sin(\vartheta)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad T &= 2\cdot\frac{m_1}{2}\left(R^2\sin^2(\vartheta)\,\omega^2 + R^2\dot{\vartheta}^2\right) + \frac{m_2}{2}\dot{z}_2^2 \\ &= m_1\left(R^2\sin^2(\vartheta)\,\omega^2 + R^2\dot{\vartheta}^2\right) + 2m_2R^2\dot{\vartheta}^2\sin^2(\vartheta) \end{aligned}$$

Wir legen den Nullpunkt des Gravitationspotentials auf die Höhe des Punktes A:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad U &= -2m_1gz_1 - m_2gz_2 \\ &= -2m_1gR\cos(\vartheta) - 2m_2gR\cos(\vartheta) \end{aligned}$$

Die Lagrange-Funktion des Systems ergibt sich damit zu

$$L = T - U = m_1\left(R^2\sin^2(\vartheta)\,\omega^2 + R^2\dot{\vartheta}^2\right) + 2m_2R^2\dot{\vartheta}^2\sin^2(\vartheta) + 2\,(m_1+m_2)\,gR\cos(\vartheta)$$

2. Für $m_2 = 0$ erhält man für ϑ folgende Bewegungsgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\vartheta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\vartheta} = 2m_1R^2\ddot{\vartheta} - 2m_1R^2\omega^2\sin(\vartheta)\cos(\vartheta) + 2m_1gR\sin(\vartheta) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \ddot{\vartheta} = \left(\omega^2\cos(\vartheta) - \frac{g}{R}\right)\sin(\vartheta)$$

3. Dem Hinweis folgend entwickeln wir die Bewegungsgleichung um $\vartheta = 0$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad \ddot{\vartheta} &\approx (\omega^2 - \frac{g}{R})\vartheta \\ \Rightarrow \qquad \ddot{\vartheta} + \left(\frac{g}{R} - \omega^2\right)\vartheta &= 0 \end{aligned}$$

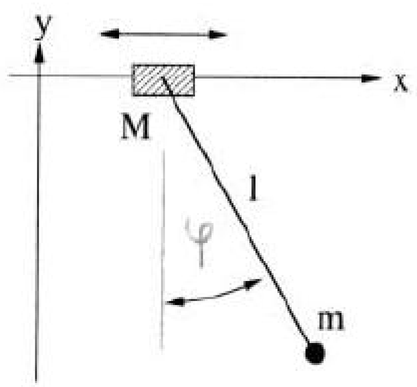
Für $\left(\frac{g}{R} - \omega^2\right) > 0$ entspricht dies der Differentialgleichung für den harmonischen Oszillator, es wirkt also eine Kraft, die der Auslenkung von ϑ aus $\vartheta = 0$ entgegenwirkt
$\Rightarrow$ stabil gegenüber Auslenkungen!

Für $\left(\frac{g}{R} - \omega^2\right) < 0$ dagegen ergibt sich eine Kraft, die die Auslenkung weiter unterstützt (allgemeine Lösung wäre in diesem Fall $\vartheta = \vartheta(0) \cosh\left(\sqrt{\frac{g}{R} - \omega^2} \cdot t\right) + \frac{\dot{\vartheta}(0)}{\sqrt{\frac{g}{R} - \omega^2}} \sinh\left(\sqrt{\frac{g}{R} - \omega^2} \cdot t\right)$)
$\Rightarrow$ instabil gegenüber Auslenkungen, Fliehkraftregler stellt sich für $\omega^2 > \frac{g}{R}$ auf!

4 Pendel an der Laufkatze

Aufgabe:

Ein ebenes Pendel der Masse m hängt an einer starren, masselosen Stange der Länge l im homogenen Schwerefeld der Erde. Das Pendel ist an einer Masse M aufgehängt, die sich reibungsfrei auf einer horizontalen Achse bewegen kann, siehe Skizze. Das Pendel kann nur in der Ebene schwingen, die durch diese Achse und die Richtung des Erdschwerefeldes aufgespannt ist. Es wirken keine weiteren Kräfte.



1. Stellen Sie die Lagrangefunktion des Systems in geeigneten Koordinaten auf.

2. Geben Sie die Erhaltungsgrößen des Systems einschließlich ihrer physikalischen Bedeutung an.

Lösung:

1. Wir wählen als generalisierte Koordinaten die x-Position $x = x_M$ von Masse M sowie den Winkel φ.
   $\Rightarrow x_m = x + l\sin(\varphi) \Rightarrow \dot{x}_m = \dot{x} + l\dot{\varphi}\cos(\varphi),\ y_m = l\cos(\varphi) \Rightarrow \dot{y}_m =$

$-l\dot{\varphi}\sin(\varphi)$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad T &= \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\left(\dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2\right) \\
&= \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + 2\dot{x}l\dot{\varphi}\cos(\varphi) + l^2\dot{\varphi}^2\cos^2(\varphi)\right) + \frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2\sin^2(\varphi) \\
&= \frac{M+m}{2}\dot{x}^2 + ml\dot{x}\dot{\varphi}\cos(\varphi) + \frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2
\end{aligned}
$$

Wir legen den Nullpunkt des Gravitationspotentials auf die x-Achse:

$$\Rightarrow \qquad U = -mgy_m = -mgl\cos(\varphi)$$

Wir erhalten damit die Lagrange-Funktion

$$L = T - U = \frac{M+m}{2}\dot{x}^2 + ml\dot{x}\dot{\varphi}\cos(\varphi) + \frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2 + mgl\cos(\varphi)$$

2. Da nur die konservative Gravitationskraft wirkt, ist die Energie $E = T+U$ erhalten (Alternativ: L hängt nicht explizit von der Zeit ab, weswegen für den hier auftretenden typischen Fall $H = T + U = E$ erhalten ist.)
   Des Weiteren hängt L nicht explizit von x ab, x ist also zyklische Koordinate und der zugehörige konjugierte Impuls $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ ist eine Erhaltungsgröße:

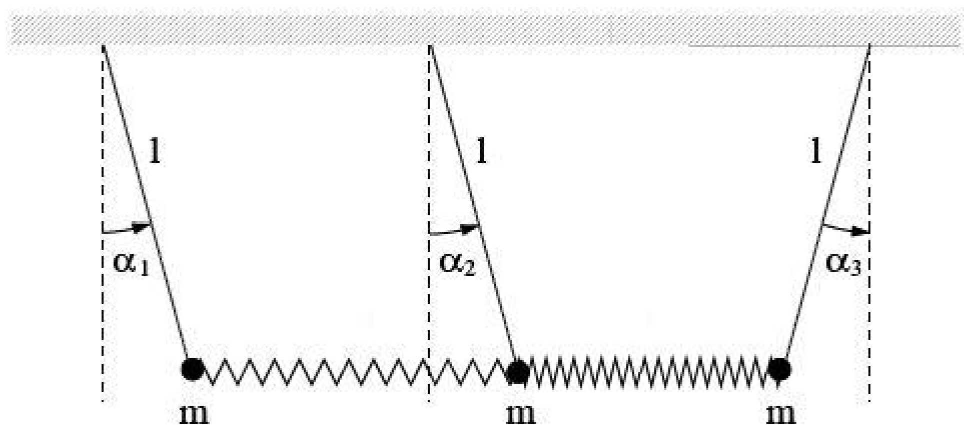
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + ml\dot{\varphi}\cos(\varphi) = M\dot{x} + m\dot{x}_m$$

   $\Rightarrow$ Der Gesamtimpuls/Schwerpunktsimpuls in x-Richtung ist erhalten

5 Gekoppelte Pendel

Aufgabe:

Drei gleiche mathematische Pendel (Masse m, Länge l) sind durch zwei ideale Federn derselben Federkonstante k verbunden und bewegen sich im homogenen Schwerefeld der Erde, siehe Abbildung. Die Länge jeder der unbelasteten Federn ist jeweils gleich dem Abstand der Aufhängungspunkte der zwei durch sie verbundenen Pendel.



1. Formulieren Sie die Lagrange-Funktion im Falle kleiner Auslenkungen.
2. Leiten Sie daraus die Bewegungsgleichungen ab.
3. Zeigen Sie durch Rechnung, dass
$$\omega_1^2 = \frac{g}{l} + \frac{k}{m}\,,\ \omega_2^2 = \frac{g}{l}\,,\ \omega_3^2 = \frac{g}{l} + \frac{3k}{m}$$
die Eigenfrequenzen des Systems sind.
4. Berechnen Sie die zu den zwei langsamsten Eigenschwingungen gehörenden Normalschwingungen (Eigenvektoren).
5. Geben Sie die zur schnellsten Schwingungsmode gehörende Normalschwingung mit kurzer Begründung, aber *ohne Rechnung* an.
6. Wie lautet die allgemeine Bewegung des physikalischen Systems ausgedrückt durch die Normalschwingungen?

Lösung:

1. Zuerst entwickeln wir (sehr ausführlich an dieser Stelle) das Gravitationspotential U_G und das harmonische Potential der Feder U_k. Dabei wählen wir immer $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0)$ als Potentialnullpunkte!
$$\begin{aligned} U_\mathrm{G} &= -mgl\cos(\alpha_1) - mgl\cos(\alpha_2) - mgl\cos(\alpha_2) + \mathrm{const} \\ U_\mathrm{G}(\vec{\alpha} = 0) &= -3mgl + \mathrm{const} \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow \qquad U_\mathrm{G} &= mgl\,(3 - \cos(\alpha_1) - \cos(\alpha_2) - \cos(\alpha_3)) \\ &\approx mgl\left(3 - \left(1 - \frac{\alpha_1^2}{2}\right) - \left(1 - \frac{\alpha_2^2}{2}\right) - \left(1 - \frac{\alpha_3^2}{2}\right)\right) \\ \Rightarrow \qquad U_\mathrm{G} &= \frac{mgl}{2}\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_k &= \frac{k}{2}\left((\vec{r}_1-\vec{r}_2)^2+(\vec{r}_2-\vec{r}_3)^2\right)+\text{const}\\
&= \frac{k}{2}\left((l\sin(\alpha_1)-l\sin(\alpha_2))^2+(l\cos(\alpha_1)-l\cos(\alpha_2))^2\right)+\\
&\quad+\frac{k}{2}\left((l\sin(\alpha_2)-l\sin(\alpha_3))^2+(l\cos(\alpha_2)-l\cos(\alpha_3))^2\right)+\text{const}\\
&\approx \frac{kl^2}{2}\left((\alpha_1-\alpha_2)^2+0\right)+\frac{kl^2}{2}\left((\alpha_2-\alpha_3)^2+0\right)+\text{const}\\
U_k(\vec{\alpha}=0) &= \text{const}\overset{!}{=}0\\
\Rightarrow \qquad U_k &= \frac{kl^2}{2}\left((\alpha_1-\alpha_2)^2+(\alpha_2-\alpha_3)^2\right)\\
&= \frac{kl^2}{2}\left(\alpha_1^2-2\alpha_1\alpha_2+2\alpha_2^2-2\alpha_2\alpha_3+\alpha_3^2\right)
\end{aligned}$$

Verlauf und Ergebnis dieser Rechnung sollte man für Schwingungsaufgaben ungefähr im Kopf haben.

Nun wollen wir kinetische und potentielle Energie in folgender Form schreiben:

$$T=\frac{1}{2}\dot{\vec{\alpha}}\cdot\underline{M}\dot{\vec{\alpha}}\,,\; U=\frac{1}{2}\vec{\alpha}\cdot\underline{A}\vec{\alpha}$$

$\underline{M}$ nennen wir *Massenmatrix*, $\underline{A}$ *Potentialmatrix*.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad U &= U_{\mathrm{G}}+U_k\\
&= \frac{1}{2}\left(mgl+kl^2\right)\alpha_1^2-\frac{1}{2}2kl^2\alpha_1\alpha_2+\frac{1}{2}\left(mgl+2kl^2\right)\alpha_2^2-\frac{1}{2}kl^2 2\alpha_2\alpha_3+\frac{1}{2}\left(mgl+kl^2\right)\alpha_3^2\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} mgl+kl^2 & -kl^2 & 0\\ -kl^2 & mgl+2kl^2 & -kl^2\\ 0 & -kl^2 & mgl+kl^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad T &= \frac{m}{2}l^2\dot{\alpha}_1^2+\frac{m}{2}l^2\dot{\alpha}_2^2+\frac{m}{2}l^2\dot{\alpha}_3^2\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\dot{\alpha}_1\\ \dot{\alpha}_2\\ \dot{\alpha}_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} ml^2 & 0 & 0\\ 0 & ml^2 & 0\\ 0 & 0 & ml^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\alpha}_1\\ \dot{\alpha}_2\\ \dot{\alpha}_3\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Die Lagrange-Funktion lässt sich damit schreiben als

$$L=T-U=\frac{1}{2}\dot{\vec{\alpha}}\cdot\underline{M}\dot{\vec{\alpha}}-\frac{1}{2}\vec{\alpha}\cdot\underline{A}\vec{\alpha}$$

2. Durch die Matrixschreibweise von T und U hat man die Euler-Lagrange-Gleichungen im Prinzip schon:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\alpha_1}\right) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\alpha_2}\right) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\alpha_3}\right) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial L}{\partial \alpha_2} \\ \frac{\partial L}{\partial \alpha_3} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \qquad \underline{M}\ddot{\vec\alpha} + \underline{A}\vec\alpha &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

3. Wir machen für $\vec\alpha$ den Ansatz $\vec\alpha = \vec A \mathrm{e}^{i\omega t}$:

$$\Rightarrow \qquad \ddot{\vec\alpha} = -\omega^2 \vec A \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega \mathrm{t}} = -\omega^2 \vec\alpha$$

$$\Rightarrow \qquad \left(\underline{A} - \omega^2 \underline{M}\right)\vec\alpha = 0$$

Damit diese Gleichung nicht nur die triviale Lösung $\vec\alpha = 0$ besitzt, muss gelten $\det\left(\underline{A} - \omega^2\underline{M}\right) = 0$

$$\Rightarrow \qquad \det\begin{pmatrix} mgl + kl^2 - ml^2\omega^2 & -kl^2 & 0 \\ -kl^2 & mgl + 2kl^2 - ml^2\omega^2 & -kl^2 \\ 0 & -kl^2 & mgl + kl^2 - ml^2\omega^2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\stackrel{\cdot 1/ml^2}{\Rightarrow} \qquad \det\begin{pmatrix} \frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega^2 & -\frac{k}{m} & 0 \\ -\frac{k}{m} & \frac{g}{l} + 2\frac{k}{m} - \omega^2 & -\frac{k}{m} \\ 0 & -\frac{k}{m} & \frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega^2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad & \left(\tfrac{g}{l} + \tfrac{k}{m} - \omega^2\right)^2 \left(\tfrac{g}{l} + 2\tfrac{k}{m} - \omega^2\right) - 2\tfrac{k^2}{m^2}\left(\tfrac{g}{l} + \tfrac{k}{m} - \omega^2\right) = \\
& \left(\tfrac{g}{l} + \tfrac{k}{m} - \omega^2\right)\left(\left(\tfrac{g}{l} + \tfrac{k}{m} - \omega^2\right)\left(\tfrac{g}{l} + 2\tfrac{k}{m} - \omega^2\right) - 2\tfrac{k^2}{m^2}\right) \stackrel{!}{=} 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \omega_1^2 = \frac{g}{l} + \frac{k}{m}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega^2\right)\left(\frac{g}{l} + 2\frac{k}{m} - \omega^2\right) &= 2\frac{k^2}{m^2} \\
\Rightarrow \qquad \omega_2^2 &= \frac{g}{l} \\
\Rightarrow \qquad \omega_3^2 &= \frac{g}{l} + 3\frac{k}{m}
\end{aligned}$$

4. Wir suchen nun die zu den Eigenwerten ω_1^2, ω_2^2, ω_3^2 gehörenden Eigenvektoren $\vec{C}^{(1)}$, $\vec{C}^{(2)}$, $\vec{C}^{(3)}$, für die somit gelten muss:

$$\left(\underline{A} - \omega_i^2 \underline{M}\right) \vec{C}^{(i)} = 0$$

Wir können natürlich auch in dieser Gleichung wieder durch ml^2 teilen und einfach die Matrix $\begin{pmatrix} \frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega^2 & -\frac{k}{m} & 0 \\ -\frac{k}{m} & \frac{g}{l} + 2\frac{k}{m} - \omega^2 & -\frac{k}{m} \\ 0 & -\frac{k}{m} & \frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega^2 \end{pmatrix}$ verwenden, deren Determinante wir oben berechnet haben. Dabei sollen wir nur die zu den langsamsten Eigenmoden, also zu ω_1^2 und ω_2^2 gehörenden Normalschwingungen berechnen:

$$\begin{aligned} \left(\underline{A} - \omega_1^2 \underline{M}\right) \vec{C}^{(1)} &= 0 \\ \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & -\frac{k}{m} & 0 \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ 0 & -\frac{k}{m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1^{(1)} \\ C_2^{(1)} \\ C_3^{(1)} \end{pmatrix} &= 0 \\ \Rightarrow \quad \vec{C}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beschreibung der ersten Normalschwingung: Das mittlere Penderl bleibt ihn Ruhe, während die beiden äußeren Pendel entgegengesetzt schwingen. Auch die zugehörige Eigenfrequenz $\omega_1^2 = \frac{g}{l} + \frac{k}{m}$ macht Sinn: Jedes der beiden schwingenden Pendel unterliegt dem Einfluss von Gravitation ($\frac{g}{l}$) und einer, nur durch seine Bewegung gespannten Feder ($\frac{k}{m}$).

$$\begin{aligned} \left(\underline{A} - \omega_2^2 \underline{M}\right) \vec{C}^{(2)} &= 0 \\ \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & 0 \\ -\frac{k}{m} & 2\frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ 0 & -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1^{(1)} \\ C_2^{(1)} \\ C_3^{(1)} \end{pmatrix} &= 0 \\ \Rightarrow \quad \vec{C}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beschreibung der zweiten Normalschwingung: Alle Pendel bewegen sich gleichphasig in dieselbe Richtung, die Federn bleiben stets entspannt. Aus diesem Grund enthält auch die zugehörige Eigenfreuquenz $\omega_2^2 = \frac{g}{l}$ nur den Beitrag der Gravitationswirkung.

5. Wir sollen die zu schnellsten Eigenfrequenz $\omega_3^2 = \frac{g}{l} + 3\frac{k}{m}$ gehörige Normalschwingung angeben. Die Eigenmode enthält den Term $3\frac{k}{m}$, alle drei

Federn müssen bei der Normalschwingung also belastet sein. Das ist nur dann möglich, wenn das mittlere Pendel sich in die entegegengesetzte Richtung wie die beiden äußeren Pendel bewegt. Auf das mittlere Pendel, das ja an beide Federn gekoppelt ist, wirkt eine doppelt so starke Kraft, es muss also mit zweimal so großer Amplitude schwingen wie die beiden äußeren Pendel.

$$\Rightarrow \qquad \vec{C}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6. Die allgemeine Bewegung des Systems wird durch Superposition der Normalschwingungen beschrieben:

$$\vec{\alpha}(t) = Q_1(t)\vec{C}^{(1)} + Q_2(t)\vec{C}^{(2)} + Q_3(t)\vec{C}^{(3)}$$

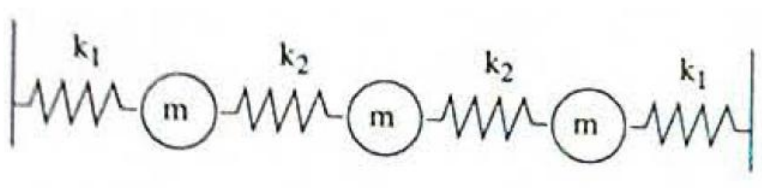
Dabei handelt es sich bei $Q_i(t)$ um eine harmonische Schwingung mit der Eigenfrequenz ω_i in Richtung der Normalschwingung $\vec{C}^{(i)}$:

$$Q_i(t) = Q_i(0)\cos(\omega_i t) + \frac{\dot{Q}_i(0)}{\omega_i}\sin(\omega_i t)$$

6 Massen und Federn

Aufgabe:

Betrachten Sie das folgende System aus Massen und Federn (siehe Skizze). Die Federn gehorchen dem Hookschen Gesetz mit den angegebenen Federkonstanten und $k_1 = 2k_2$. Betrachten Sie weiter im folgenden nur Longitudinalschwingungen. Es wirken keine weiteren Kräfte.



1. Stellen Sie die Lagrange-Funktion des Systems in geeigneten Koordinaten auf.

2. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen der drei Massen in Matrixform auf. Hinweis: Die in den Bewegungsgleichungen auftretende Matrix ist proportional zu

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Finden Sie die Eigenfrequenzen des Systems und bestimmen Sie auch die zugehörigen Eigenvektoren.

4. Beschreiben Sie die Normalschwingungen des Systems anschaulich.

Lösung:

1. Wir wählen als generalisierte Koordinaten x_i die Auslenkungen der Massen aus ihrer Gleichgewichtslage, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $k \stackrel{\text{def}}{=} k_2$

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\dot{\vec{x}} \cdot \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \dot{\vec{x}} \\ &= \frac{1}{2}\dot{\vec{x}} \cdot \underline{M}\dot{\vec{x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U &= \frac{k_1}{2}x_1^2 + \frac{k_2}{2}\left(x_1 - x_2\right)^2 + \frac{k_2}{2}\left(x_2 - x_3\right)^2 + \frac{k_1}{2}x_3^2 \\ &= kx_1^2 + \frac{k}{2}x_1^2 - kx_1x_2 + \frac{k}{2}x_2^2 + \frac{k}{2}x_2^2 - kx_2x_3 + \frac{k}{2}x_3^2 + kx_3^2 \\ &= \frac{1}{2}3kx_1^2 - kx_1x_2 + \frac{1}{2}2x_2^2 - kx_2x_3 + \frac{1}{2}3kx_3^2 \\ &= \frac{1}{2}\vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 3k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 3k \end{pmatrix} \vec{x} \\ &= \frac{1}{2}\vec{x} \cdot \underline{A}\vec{x} \end{aligned}$$

Wir erhalten damit als Lagrange-Gleichung

$$L = T - U = \frac{1}{2}\dot{\vec{x}} \cdot \underline{M}\dot{\vec{x}} - \frac{1}{2}\vec{x} \cdot \underline{A}\vec{x}$$

2. Die Bewegungsgleichungen in Matrixform lauten

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3}\right) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial x_1} \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} \\ \frac{\partial L}{\partial x_3} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \qquad \underline{M}\ddot{\vec{x}} + \underline{A}\vec{x} &= 0
\end{aligned}$$

3. Wir machen wieder den Ansatz $\vec{x} = \vec{A}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ und erhalten damit

$$\left(\underline{A} - \omega^2 \underline{M}\right)\vec{x} = 0$$

Wir suchen nun wieder über $\det\left(\underline{A} - \omega^2\underline{M}\right) = 0$ die Eigenmoden ω_i^2 des Systems:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad & \det\begin{pmatrix} 3k - m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - m\omega^2 & -k \\ 0 & -k & 3k - m\omega^2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0 \\
\overset{\cdot 1/m}{\Rightarrow} \qquad & \det\begin{pmatrix} 3\frac{k}{m} - \omega^2 & -\frac{k}{m} & 0 \\ -\frac{k}{m} & 2\frac{k}{m} - \omega^2 & -\frac{k}{m} \\ 0 & -\frac{k}{m} & 3\frac{k}{m} - \omega^2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0 \\
\Rightarrow \qquad & \left(3\tfrac{k}{m} - \omega^2\right)^2\left(2\tfrac{k}{m} - \omega^2\right) - 2\tfrac{k^2}{m^2}\left(3\tfrac{k}{m} - \omega^2\right) = \\
& \left(3\tfrac{k}{m} - \omega^2\right)\left(\left(3\tfrac{k}{m} - \omega^2\right)\left(2\tfrac{k}{m} - \omega^2\right) - 2\tfrac{k^2}{m^2}\right) \overset{!}{=} 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \omega_1^2 = 3\frac{k}{m}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad \left(3\frac{k}{m} - \omega^2\right)\left(2\frac{k}{m} - \omega^2\right) &= 2\frac{k^2}{m^2} \\
\Rightarrow \qquad \omega_2^2 &= \frac{k}{m} \\
\Rightarrow \qquad \omega_3^2 &= 4\frac{k}{m}
\end{aligned}$$

Bestimmung der zugehörigen Eigenvektoren $\vec{C}^{(i)}$, für die gilt $\left(\underline{A} - \omega_i^2\underline{M}\right)\vec{C}^{(i)} = 0$. Wir teilen auch hier die Gleichung durch m und rechnen mit der Matrix $\begin{pmatrix} 3\frac{k}{m} - \omega^2 & -\frac{k}{m} & 0 \\ -\frac{k}{m} & 2\frac{k}{m} - \omega^2 & -\frac{k}{m} \\ 0 & -\frac{k}{m} & 3\frac{k}{m} - \omega^2 \end{pmatrix}$:

$$\left(\underline{A} - \omega_1^2\underline{M}\right)\vec{C}^{(1)} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} 0 & -\frac{k}{m} & 0 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ 0 & -\frac{k}{m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1^{(1)} \\ C_2^{(1)} \\ C_3^{(1)} \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{C}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\underline{A} - \omega_2^2 \underline{M}\right) \vec{C}^{(2)} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} 2\frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & 0 \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ 0 & -\frac{k}{m} & 2\frac{k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1^{(2)} \\ C_2^{(2)} \\ C_3^{(2)} \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{C}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\underline{A} - \omega_3^2 \underline{M}\right) \vec{C}^{(3)} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} -\frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & 0 \\ -\frac{k}{m} & -2\frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ 0 & -\frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1^{(3)} \\ C_2^{(3)} \\ C_3^{(3)} \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{C}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Bei der ersten Normalschwingung mit der Eigenfrequenz $\omega_1^2 = 3\frac{k}{m}$ bleibt die mittlere Masse in Ruhe, während die beiden äußeren Massen in entgegengesetzte Richtungen schwingen.
   Befindet sich das System in der zweiten Normalschwingung mit der Frequenz $\omega_2^2 = \frac{k}{m}$ bewegen sich alle Masse in dieselbe Richtung, wobei die Amplitude der mittleren Masse doppelt so groß ist, wie der der äußeren Masse.
   In der dritten Normalschwingung mit Eigenmode $\omega_3^2 = 4\frac{k}{m}$ bewegen sich die beiden äußeren Massen in dieselbe Richtunge, während die mittlere Masse in entgegengesetzter Richtung schwingt.