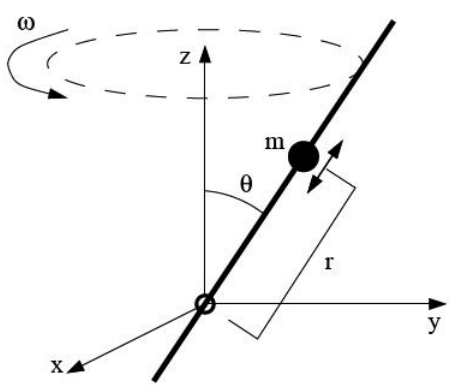
Übungen zu Lagrange-Formalismus und kleinen Schwingungen

Jonas Probst

22.09.2009

1 Teilchen auf der Stange

Ein Teilchen der Masse m wird durch eine Zwangskraft auf einer masselosen Stange gehalten, auf der es sich reibungsfrei bewegen kann. Die Stange rotiert in einem festen Winkel θ zur z-Achse mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω. Es wirken *keine weiteren Kräfte*!



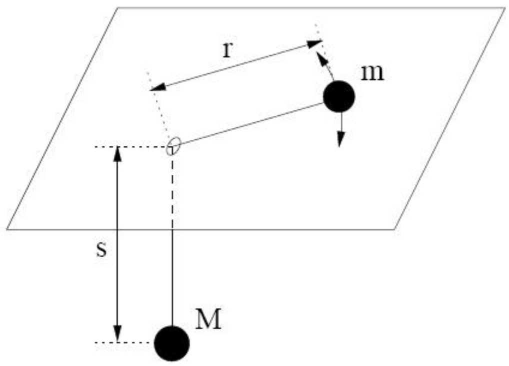
1. Leiten Sie die Lagrange-Funktion des Teilchens explizit in Kugelkoordinaten her.

2. Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für den Radius $r(t)$ des Teilchens aus der Lagrange-Funktion und lösen Sie diese mit den Anfangsbedingungen $r(0) = r_0$ und $\dot{r}(0) = 0$. Skizzieren Sie die Bewegung des Teilchens.

2 Verbundene Massenpunkte

Zwei Massenpunkte m und M sind durch einen masselosen Faden der konstanten Länge $l = r + s$ verbunden. Die Masse kann an dem Faden (mit der variierenden

Teillänge r) auf der Ebene rotieren. Der Faden führt durch ein Loch in der Ebene zu M, wobei die Masse m an dem straff gespannten Faden (mit der ebenfalls variierenden Teillänge $s = l - r$) hängt.

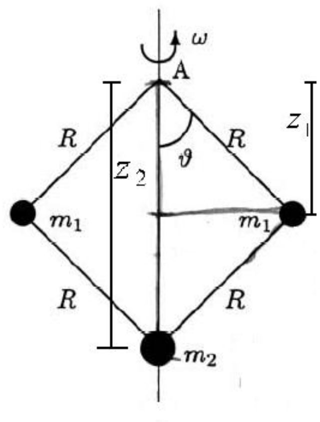


1. Stellen Sie die Lagrange-Funktion des Systems in geeigneten Koordinaten auf.

2. Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen und Bewegungskonstanten. Geben Sie an, unter welchen Bedingungen M nach oben oder unten beschleunigt wird.

3 Fliehkraftregler

Gegeben Sei das in der Abbildung skizzierte System. Ein Punkt m_2 bewege sich entlang der vertikalen Achse und ist durch masselose Stange der Länge R mit zwei Massen m_1 verbunden. Das System ist durch zwei weitere masselose Stangen der Länge R am Punkt A aufgehängt und dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die die Achse. Die Massenpunkte unterliegen der Schwerkraft.



1. Wählen Sie als generalisierte Koordinate θ. Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion des Systems.

2. Sei nun $m_2 = 0$. Zeigen Sie, dass θ der Bewegungsgleichung

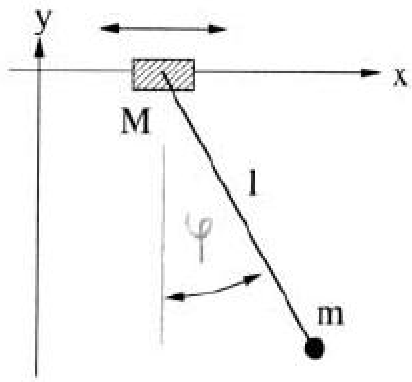
$$\ddot{\theta} = \left(\omega^2 \cos(\theta) - \frac{g}{R}\right) \sin(\theta)$$

genügt.

3. Welche Bedingung muss die Winkelgeschwindigkeit ω erfüllen, damit sich der Fliehkraftregler aufstellt, d.h. dass $\theta = 0$ instabil gegenüber kleinen Auslenkungen ist. Entwickeln Sie dazu die Bewegungsgleichung um $\theta = 0$ bis zur zweiten Ordnung.

4 Pendel an der Laufkatze

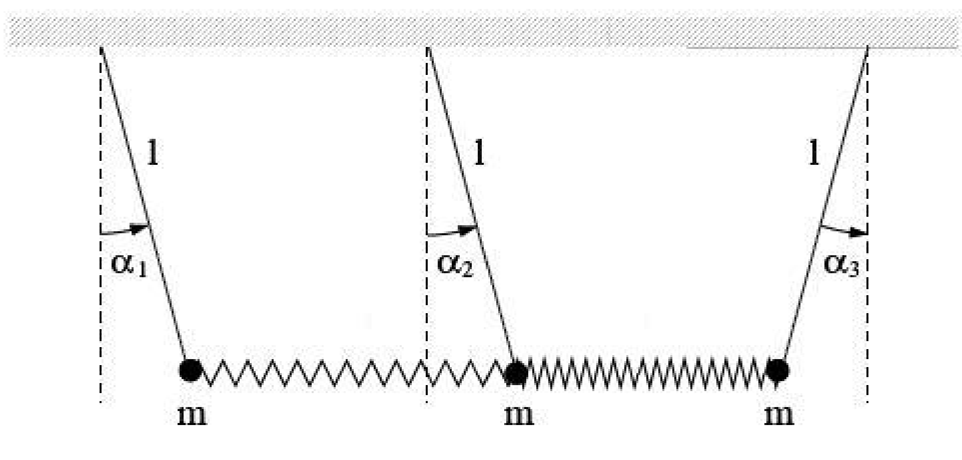
Ein ebenes Pendel der Masse m hängt an einer starren, masselosen Stange der Länge l im homogenen Schwerefeld der Erde. Das Pendel ist an einer Masse M aufgehängt, die sich reibungsfrei auf einer horizontalen Achse bewegen kann, siehe Skizze. Das Pendel kann nur in der Ebene schwingen, die durch diese Achse und die Richtung des Erdschwerefeldes aufgespannt ist. Es wirken keine weiteren Kräfte.



1. Stellen Sie die Lagrangefunktion des Systems in geeigneten Koordinaten auf.
2. Geben Sie die zyklischen Koordinaten und die zugehörigen Erhaltungsgrößen des Systems an und erläutern Sie deren physikalische Bedeutung.

5 Gekoppelte Pendel

Drei gleiche mathematische Pendel (Masse m, Länge l) sind durch zwei ideale Federn derselben Federkonstante k verbunden und bewegen sich im homogenen Schwerefeld der Erde, siehe Abbildung. Die Länge jeder der unbelasteten Federn ist jeweils gleich dem Abstand der Aufhängungspunkte der zwei durch sie verbundenen Pendel.



1. Formulieren Sie die Lagrange-Funktion im Falle kleiner Auslenkungen.

2. Leiten Sie daraus die Bewegungsgleichungen ab.

3. Zeigen Sie durch Rechnung, dass

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l} + \frac{k}{m}\,,\ \omega_2^2\,,\ \omega_3^2 = \frac{g}{l} + \frac{3k}{m}$$

   die Eigenfrequenzen des Systems sind.

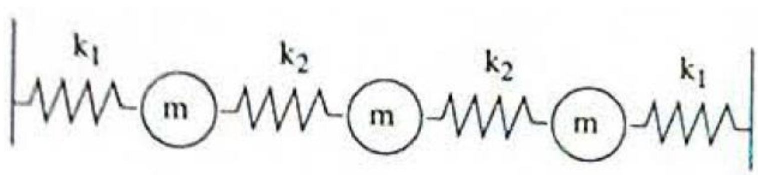
4. Berechnen Sie die zu den zwei langsamsten Eigenschwingungen gehörenden Normalschwingungen (Eigenvektoren).

5. Geben Sie die zur schnellsten Schwingungsmode gehörende Normalschwingung mit kurzer Begründung, aber *ohne Rechnung* an.

6. Wie lautet die allgemeine Bewegung des physikalischen Systems ausgedrückt durch die Normalschwingungen?

6 Massen und Federn

Betrachten Sie das folgende System aus Massen und Federn (siehe Skizze). Die Federn gehorchen dem Hookschen Gesetz mit den angegebenen Federkonstanten und $k_1 = 2k_2$. Betrachten Sie weiter im folgenden nur Longitudinalschwingungen. Es wirken keine weiteren Kräfte.



1. Stellen Sie die Lagrange-Funktion des Systems in geeigneten Koordinaten auf.

2. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen der drei Massen in Matrixform auf. Hinweis: Die in den Bewegungsgleichungen auftretende Matrix ist proportional zu

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Finden Sie die Eigenfrequenzen des Systems und bestimmen Sie auch die zugehörigen Eigenvektoren.

4. Beschreiben Sie die Normalschwingungen des Systems anschaulich.