Matthias Eibl    Blatt 1

# Ferienkurs Theoretische Mechanik 2009

Newtonsche Mechanik, Keplerproblem - Lösungen

## Aufgaben für Montag

## 1 Herleitungen zur Vorlesung

Zeigen Sie die in der Vorlesung ausgelassenen Zwischenschritte:

1.
$$\vec{\nabla}U(r) = \frac{dU}{dr}\vec{e}_r \tag{1}$$

### Lösung

Komponentenweise Betrachtung von $\vec{\nabla}U(r)$ liefert:

$$\frac{\partial U(r)}{\partial x} = \frac{dU(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{dU(r)}{dr}\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{dU(r)}{dr}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}2x = \frac{dU(r)}{dr}\frac{x}{r}$$

Analog für $y$ und $z$ Komponente ergibt sich:

$$-\vec{\nabla}U(r) = -\begin{pmatrix}\partial U(r)/\partial x\\ \partial U(r)/\partial y\\ \partial U(r)/\partial z\end{pmatrix} = \frac{dU(r)}{dr}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{dU(r)}{dr}\vec{e}_r$$

2.
$$\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\Big(\frac{dU(r)}{dr}\vec{e}_r\Big) = \frac{d}{dt}\Big(U\big(r(t)\big)\Big) \tag{2}$$

### Lösung

$$\vec{r} = r\vec{e}_r \rightarrow \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\phi}\vec{e}_\phi, \quad \vec{e}_r\cdot\vec{e}_\phi = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\Big(\frac{dU(r)}{dr}\vec{e}_r\Big) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\phi}\vec{e}_\phi\cdot\Big(\frac{dU(r)}{dr}\vec{e}_r\Big) = \big(\dot{r}(\underbrace{\vec{e}_r\cdot\vec{e}_r}_{=1}) + r\dot{\phi}(\underbrace{\vec{e}_r\cdot\vec{e}_\phi}_{=0})\big)\frac{dU(r)}{dr} = \frac{dr}{dt}\frac{dU(r)}{dr}$$

3.
$$m_1\vec{r}_1\times\dot{\vec{r}}_1 + m_2\vec{r}_2\times\dot{\vec{r}}_2 = M\vec{R}\times\dot{\vec{R}} + \mu\vec{r}\times\dot{\vec{r}} \tag{3}$$

### Lösung

Setze ein: $\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M}\vec{r} \qquad \vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M}\vec{r}$

$m_1\vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_1 + m_2\vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2 = m_1\big(\vec{R} + \frac{m_2}{M}\vec{r}\big) \times \big(\dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{M}\dot{\vec{r}}\big) + m_2\big(\vec{R} - \frac{m_1}{M}\vec{r}\big) \times \big(\dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{M}\dot{\vec{r}}\big) =$
$m_1\big(\vec{R} \times \dot{\vec{R}} \underline{+ \frac{m_2}{M}\vec{R} \times \dot{\vec{r}} + \frac{m_2}{M}\vec{r} \times \dot{\vec{R}}} + \frac{m_2 m_2}{MM}\vec{r} \times \dot{\vec{r}}\big) + m_2\big(\vec{R} \times \dot{\vec{R}} \underline{- \frac{m_1}{M}\vec{R} \times \dot{\vec{r}} - \frac{m_1}{M}\vec{r} \times \dot{\vec{R}}} + \frac{m_1 m_1}{MM}\vec{r} \times \dot{\vec{r}}\big) =$
$(m_1 + m_2)\vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \frac{m_1 m_2(m_1 + m_2)}{MM}\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = M\vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \mu\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$

4.
$$\frac{d}{dt}\big(M\vec{R} \times \dot{\vec{R}}\big) = 0 \qquad \text{sowie} \qquad \frac{d}{dt}\vec{l} = \frac{d}{dt}\big(\mu\vec{r} \times \dot{\vec{r}}\big) = 0 \tag{4}$$

### Lösung

$$\frac{d}{dt}\big(M\vec{R} \times \dot{\vec{R}}\big) = M\big(\underbrace{\dot{\vec{R}} \times \dot{\vec{R}}}_{\parallel \Rightarrow = 0} + \underbrace{\vec{R} \times \ddot{\vec{R}}}_{\ddot{R} = 0 \Rightarrow = 0}\big) = 0$$
$$\frac{d}{dt}\big(\mu\vec{r} \times \dot{\vec{r}}\big) = \mu\big(\underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_{\parallel \Rightarrow = 0} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}}\big) = \mu\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \mu\underbrace{\vec{r} \times \frac{-\vec{\nabla}U(r)}{\mu}\vec{e}_r}_{\vec{e}_r \parallel \vec{r} \Rightarrow = 0} = 0$$

5.
$$l_z = l = (x\dot{y} - \dot{x}y) = r^2\dot{\phi} \tag{5}$$

### Lösung

$\dot{x} = \dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\phi \qquad \dot{y} = \dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi$
$(x\dot{y} - \dot{x}y) = \underline{r\cos\phi(\dot{r}\sin\phi} + r\dot{\phi}\cos\phi)\underline{-(\dot{r}\cos\phi} - r\dot{\phi}\sin\phi)\underline{r\sin\phi} = r^2\dot{\phi}\cos^2\phi + r^2\dot{\phi}\sin^2\phi =$
$r^2\dot{\phi} = l$

6.
$$\frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} \tag{6}$$

### Lösung

$$\frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\phi}\vec{e}_\phi)^2 = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

7. Bestimmen Sie das Verhältnis von kinetischer und potentieller Energie für ein harmonisches Potential und ein $1/r$-Potential

### Lösung

$$\text{harmonisches Potential: } U = \frac{1}{2}kr^2 \quad \Rightarrow \quad n = 2 \Rightarrow \quad \langle T\rangle = \langle U\rangle$$
$$1/r \text{ Potential: } U = kr^{-1} \quad \Rightarrow \quad n = -1 \Rightarrow \quad 2\langle T\rangle = -\langle U\rangle$$

8.
$$\det\left|\tfrac{\partial x,y,z}{\partial r,\theta,\phi}\right| = r^2\sin\theta \tag{7}$$

### Lösung

$$\det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta$$

## 2 Kurze Fragen

1. Ist folgendes Kraftfeld konservativ?

$$\vec{F} = \left(2x^2 + y, -yz, 4xz^2\right)^T$$

### Lösung

Nein, Rotation ungleich Null:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(y, -4z^2, -1\right)^T \neq \vec{0}$$

2. Wie lautet das Potential zu folgenden Kraftfeld?

$$\vec{F} = \left(y^2z^3 - 6xz^2, 2xyz^3, 3xy2z2 - 6x^2z\right)^T$$

### Lösung

$$\phi = 3x^2z^2 - xy^2z^3$$

3. Eine schiefe Ebene liegt austariert auf einer Waage mit Neigungswinkel $\alpha$. Auf ihr befindet sich, irgendwie befestigt, eine Masse $m$. Die Waage zeigt ihr Gewicht. Die Befestigung wird nun gelöst, die Masse gleitet reibungsfrei die schiefe Ebene hinab. Ändert sich die Anzeige der Waage?

### Lösung

Im Gleichgewicht ist die Gewichtskraft der Masse gleich der Gegenkraft die die Waage erzeugt.
Die Gewichtskraft teilt sich in Normalkraft senkrecht zur Oberfläche der schiefen Ebene und in die Haftkraft parallel zur schiefen Ebene auf.
Sobald die Masse zu gleiten beginnt, ist die resultierende Kraft nur noch die Normalkraft auf die schiefe Ebene. Der Anteil der Normalkraft parallel zur Gegenkraft der Waage ist gerade um $\cos^2\alpha$ kleiner. Die Waage zeigt also weniger Gewicht an.
Der Extremfall wäre der freie Fall. Die Masse hat dann keine Normalkraft auf die Ebene und erzeugt somit keine Gegenkraft zur Waage.

4. Von einem Turm wird ein Stein reibungsfrei fallen gelassen. Der Turm befinde sich auf nördlichen Halbkugel. Wo fällt der Stein hin? Wie hängt die Lage und Höhe des Turms vom Auftreffort des Steins zusammen?
(Qualitative Antworten)

### Lösung

Der Stein fällt nach Osten. Jehöher der Turm ist, umso weiter fällt der Stein und wird auch weiter abgelengt. Je näher der Turm am Äquator steht umso größer ist die Ablenkung. Diese Ablenkung wird durch die Corioliskraft beschrieben und resultiert aus der Drehimpulserhaltung.
Der Betrag der Corioliskraft hängt von der Änderung des Drehradiuses um die Erdrotationsachse ab. Je größer diese Änderung ist, umso größer ist die Geschwindigkeit des Steins, also auch dessen Ablenkung.

5. Ein Erdsatellit bewegt sich auf einer Kreisbahn mit der Frequenz $\omega$.
Bestimmen Sie den Radius $r$ der Kreisbahn als Funktion von $\omega$ mit dem 3. Keplerschen Gesetz:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(M_E + m_S)} \cdot a^3 \approx \frac{4\pi^2}{GM_E} \cdot a^3$$

Für welchen Radius $r_0$ ergibt sich eine geostationäre Bahn? (Größenordnung ist ausreichend, $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg \cdot s^2}}$, $M_E = 5{,}974 \cdot 10^{24}$ kg)

### Lösung

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \Rightarrow \qquad r^3 = \frac{GM_E}{\omega^2}$$

Geostationär heißt, der Satellit befindet sich immer über dem gleichen Ort. Für eine Umdrehung muss er also 24 h benötigen:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \qquad T = 24h = 24 \cdot 60 \cdot 60\ \mathrm{s} \qquad r_0 = 4,2 \cdot 10^7\ \mathrm{m}$$

# 3 Bewegung im 1-dim Potential

Ein Körper der Masse $m$ führt eine eindimensionale Bewegung im Potential $U(x)$ aus.

- Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung $m\ddot{x} = F(x(t))$ durch Integration auf die Form

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{2} \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{E - U(x')}}} \tag{8}$$

gebracht werden kann.

### Lösung

$$m\ddot{x} = F(x(t)) \xrightarrow[F=-\frac{dU}{dx}]{\cdot\dot{x}} m\dot{x}\ddot{x} = -\frac{dx}{dt}\frac{dU}{dx} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}\dot{x}^2 = -\frac{dU}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\big(\underbrace{\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U}_{:=E=\text{const}} = 0\big)$$

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U = E \quad \Leftrightarrow \quad \dot{x} = \pm\sqrt{\frac{m}{2}(E-U)} = \frac{dx}{dt} \qquad \text{wähle + Lösung}$$

$$\text{Trennung der Variablen:} \quad dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{m}{2}(E-U)}} \quad \Rightarrow \quad \int_{t_0}^{t} dt' = t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{m}{2}(E-U)}}$$

- Konkret sei das harmonische Potential $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$ gegeben. Bestimmen Sie $t(x)$ und daraus $x(t)$. (Hinweis: $\int dx \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$)

**Lösung**

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{(E-U)}} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{(E - \frac{1}{2}kx^2)}} = \sqrt{\frac{m}{2E}} \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{(1 - \frac{k}{2E}x'^2)}} =$$

$$\text{subst.: } z = \sqrt{\frac{k}{2E}}x' \rightarrow \quad = \sqrt{\frac{m}{2E}}\sqrt{\frac{2E}{k}} \int_{\sqrt{\frac{k}{2E}}x_0}^{\sqrt{\frac{k}{2E}}x} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = \sqrt{\frac{m}{k}}\Big(\arcsin(\sqrt{\frac{k}{2E}}x) - \underbrace{\arcsin(\sqrt{\frac{k}{2E}}x_0)}_{:=\varphi_0}\Big)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{k}{m}}(t - t_0) = \arcsin(\sqrt{\frac{k}{2E}}x) - \varphi_0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin\Big(\sqrt{\frac{k}{m}}(t-t_0) + \varphi_0\Big)$$

- Bestimmen Sie mit dem obigen Potential die Umkehrpunkte $x_1, x_2$ mit $\dot{x_1} = \dot{x_1} = 0$ und berechnen Sie die Periode
$$T = 2\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \tag{9}$$
der Bewegung. Kommt Ihnen das bekannt vor?

**Lösung**

Umkehrpunkt bedeutet $E_{kin} = 0 \quad \Rightarrow \quad E = U$ mit $U(x) = \frac{k}{2}x^2$ ergibt sich $x_1 = -\sqrt{\frac{2E}{k}}$ und auf der anderen Seite $x_2 = -x_1 = \sqrt{\frac{2E}{k}}$. Das Integral für die Periode lässt sich somit berechnen.

$$T = 2\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} = 2\sqrt{\frac{m}{k}}\Big(\underbrace{\arcsin\big(\underbrace{\sqrt{\frac{k}{2E}}x_2}_{=1}\big)}_{=\frac{\pi}{2}} - \underbrace{\arcsin\big(\underbrace{\sqrt{\frac{k}{2E}}x_1}_{=-1}\big)}_{=-\frac{\pi}{2}}\Big) = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

für die Schwingungsdauer im harmonischen Oszilator wissen wir bereits: $\quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

# 4 Mond im Feld eines Gasplaneten

Ein punktförmiger Mond der Masse $m_0$ bewege sich im Feld eines dünnen Gasplaneten mit sehr geringer Dichte $\rho_0$, Masse $M \ll m_0$ und Radius $R$. Wir nehmen vereinfachend an, die Dichte des Gasplaneten im Innern sei konstant für $r < R$:

$$\rho(r) = \rho_0 \Theta(R - r)$$

wobei $\Theta(x)$ die Heavyside-Funktion ist.

- Zeigen Sie ausgehend vom Ergebnis der Vorlesung für das Gravitationspotential einer beliebigen Massendichteverteilung $\rho(\vec{r})$
$$U(r) = -Gm_0 \int_V d^3x \frac{\rho(\vec{x})}{|\vec{x} - \vec{r}|}$$
durch explizites Ausführen der Winkelintegration, dass mit einer kugelsymmetrischen Massendichteverteilung $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$ für das Gravitationspotential gilt:
$$U(r) = -4\pi G m_0 \Big(\frac{1}{r}\int_0^r ds s^2 \rho(s) + \int_r^\infty ds s \rho(s)\Big)$$

## Lösung

$$\rho(\vec{s}) = \begin{cases} \rho_0 & \text{für } s \leq R, s = |\vec{x}| \\ 0 & \text{für } s \geq R \end{cases}$$

Wir brauchen noch einen Ausdruck für den Abstand des Probekörpers zum Massenelement $|\vec{s} - \vec{r}|$. Diesen erhalten wir durch Anwendung des Kosinussatzes:

$$|\vec{s} - \vec{r}|^2 = s^2 + r^2 - 2sr\cos\theta$$

Dies in obige Formel eingesetzt ergibt:

$$U(\vec{r}) = -Gm_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{\infty} dss^2 \frac{\rho(s)}{\sqrt{s^2 + r^2 - 2sr\cos\theta}}$$

Mit der Substituion $\eta = \cos\theta$ erhält man für das Integral über $\theta$:

$$\int_0^{\pi} d\theta \sin\theta (s^2 + r^2 - 2sr\cos\theta)^{-1/2} = \int_{-1}^{1} d\eta (s^2 + r^2 - 2sr\eta)^{-1/2} = \Big[\sqrt{s^2 + r^2 - 2sr\eta}\frac{1}{-2rs}2\Big]_{-1}^{1} =$$

$$= -\frac{1}{rs}\left(\sqrt{(r-s)^2} - \sqrt{(r+s)^2}\right) = -\frac{1}{rs}\Big(|r-s| - (r+s)\Big) = \begin{cases} 2/r & \text{für } r > s \\ 2/s & \text{für } r < s \end{cases}$$

Dies eingesetzt ergibt das Ergebnis:

$$U(r) = -4\pi Gm_0 \Big(\frac{1}{r}\int_0^r dss^2\rho(s) + \int_r^{\infty} dss\rho(s)\Big)$$

- Berechnen Sie mit der angegebenen Massendichteverteilung das Gravitationspotential für $r < R$ und für $r > R$ und skizzieren Sie das Ergebnis.

## Lösung

Die Massendichteverteilung lautet $\rho(r) = \rho_0\Theta(R - r)$ damit ergibt sich für das Potential:

$$U(r) = -4\pi Gm_0 \Big(\frac{1}{r}\int_0^r dss^2\rho_0\Theta(R-r) + \int_r^{\infty} dss\rho_0\Theta(R-r)\Big)$$

Falls $r > R$ fällt der zweite Summand wegen $\Theta(R - r) = \Theta(< 0) = 0$ weg.
Wir betrachten das Integral also einmal für $r > R$ und für $r < R$:
1. Fall $r > R$:

$$U(r) = -4\pi Gm_0\frac{1}{r}\int_0^r dss^2\rho_0\Theta(R-r) = -4\pi Gm_0\frac{1}{r}\Big[\int_0^R dss^2\rho_0 \underbrace{\Theta(R-r)}_{\Theta(>0)=1} + \underbrace{\int_R^r dss^2\rho_0\Theta(R-r)}_{=0 \ \left(\Theta(<0)=0\right)}\Big] =$$

$$= -4\pi Gm_0\frac{1}{r}\Big[\frac{1}{3}s^3\rho_0\Big]_0^R = -\underbrace{\frac{4}{3}\pi\rho_0 R^3}_{=V\cdot\rho_0=M} Gm_0\frac{1}{r} = -G\frac{m_0 M}{r}$$

2. Fall $r < R$:
Beide Terme müssen berücksichtigt werden:

$$U(r) = -4\pi G m_0 \Big( \frac{1}{r} \int_0^r ds s^2 \rho_0 \underbrace{\Theta(R-r)}_{\Theta(>0)=1} + \int_r^\infty ds s \rho_0 \Theta(R-r) \Big)$$

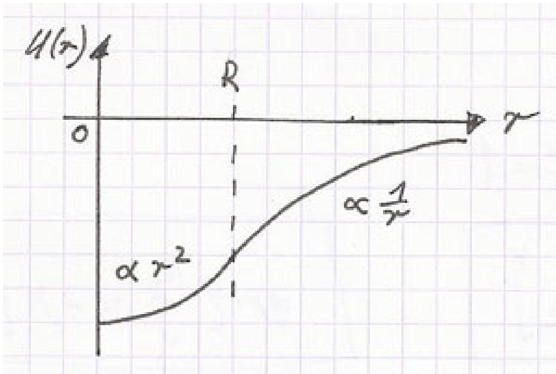
$$= -4\pi G m_0 \Big( \frac{1}{r} \int_0^r ds s^2 \rho_0 + \int_r^R ds s \rho_0 \underbrace{\Theta(R-r)}_{\Theta(>0)=1} + \underbrace{\int_R^\infty ds s \rho_0 \Theta(R-r)}_{=0 \quad (\Theta(<0)=0)} \Big)$$

$$= -4\pi G m_0 \rho_0 \Big[ \frac{1}{r}\frac{1}{3} s^3 \Big|_0^r + \frac{1}{2} s^2 \Big|_r^R \Big] = -4\pi G m_0 \rho_0 \Big[ \frac{1}{r}\frac{1}{3} r^3 + \frac{1}{2}(R^2 - r^2) \Big] = -4\pi G m_0 \rho_0 \Big[ \frac{1}{3} r^2 + \frac{1}{2} R^2 - \frac{1}{2} r^2 \Big]$$

$$= -4\pi G m_0 \rho_0 \Big[ -\frac{1}{6} r^2 + \frac{1}{2} R^2 \Big] = -\frac{4}{3}\pi G m_0 \rho_0 R^3 \Big[ -\frac{1}{2}\frac{r^2}{R^3} + \frac{3}{2}\frac{1}{R} \Big] = G M m_0 \Big[ \frac{1}{2}\frac{r^2}{R^3} - \frac{3}{2}\frac{1}{R} \Big]$$

Wir können noch kurz die Stetigkeit des Potenials am Übergang $r = R$ überprüfen:
für $r > R$: $U(R) = -G\frac{m_0 M}{R}$
für $r < R$: $U(R) = G M m_0 \Big[ \frac{1}{2}\frac{R^2}{R^3} - \frac{3}{2}\frac{1}{R} \Big] = -G\frac{m_0 M}{R}$
Das Potential ist also stetig. Für den Bereich $r < R$ ergibt sich eine $\propto r^2$ Abhängigkeit und für den Bereich $r < R$ eine $\propto \frac{1}{r}$ Abhängigkeit. Damit können wir das Potential skizzieren:

$$U(r) = \begin{cases} G M m_0 \Big[ \frac{1}{2}\frac{r^2}{R^3} - \frac{3}{2}\frac{1}{R} \Big] & \text{für } r < R \\ -G\frac{m_0 M}{r} & \text{für } r > R \end{cases}$$




- Bestimmen Sie die auf den Mond der Masse $m_0$ wirkende Gravitationskraft für $r < R$ und $r > R$ und skizzieren Sie das Ergebnis.

## Lösung

Die Kraft ergibt sich aus dem Gradienten des Potentials:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} U(r) = -\frac{dU(r)}{dr}\vec{e}_r$$

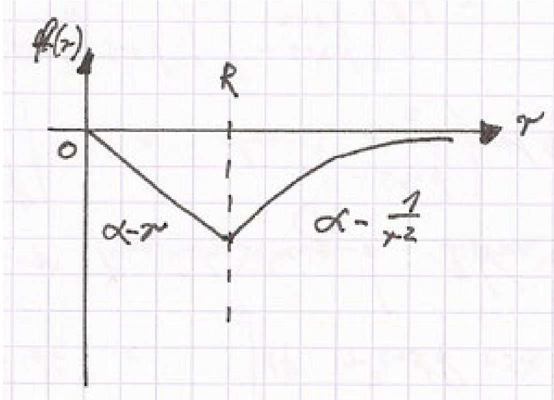
Wir unterscheiden wieder zwischen beiden Bereichen:

$$\text{für } r < R: \qquad \vec{F}(\vec{r}) = -G m_0 M \frac{r}{R^3}\vec{e}_r$$

$$\text{für } r > R: \qquad \vec{F}(\vec{r}) = -G m_0 M \frac{1}{r^2}\vec{e}_r$$

Und stellen fest, dass auch die Kraft stetig ist an der Stelle $r = R$. Somit können wir den Betrag der Kraft skizzieren:

Die Kraft nimmt mit dem Abstand zu, solange sich der Mond im Inneren des Gasplaneten befindet, da die auf ihn wirkende Masse zunimmt. Sobald er außerhalb der Gaswolke ist, spürt er den Gasplaneten wie eine Punktmasse und die Kraft fällt wie gewohnt mit $\frac{1}{r^2}$ ab.
(Die Kraft wirkt zum Zentrum, also in negative $r$ Richtung.)




- Der Mond befinde sich nun zu einer Zeit $t = 0$ am Ort $r(0) = r_0 < R, \varphi(0) = 0, \theta(0) = \frac{\pi}{2}$ in Ruhe. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf unter der Annahme, dass wegen der geringen Dichte Reibungseffekte vernachlässigbar sind.
  Lösen Sie die Bewegungsgleichungen.
  Was für eine Bewegung führt der Mond aus?

## Lösung

Der Mond ist in Ruhe, d.h. er hat keinen Drehimpuls. Die Bewegung erfolgt somit ausschließlich in radialer Richtung. Die Bewegung findet außerdem nur im Inneren des Gasplaneten statt, da der Anfangspunkt im Inneren liegt. Ausgehend von der Bewgungsgleichung ergibt sich damit:

$$m_0\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}) = -\underbrace{Gm_0M\frac{1}{R^3}}_{:=a}\vec{r} = -a\vec{r}$$

$$\vec{r} = r\vec{e}_r, \quad \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi, \quad \ddot{\vec{r}} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{r}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + \ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi$$

da Drehimpuls Null folgt: $\dot{\varphi}, \ddot{\varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad m_0\ddot{r} + ar = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{r} + \frac{a}{m_0}r = \ddot{r} + \omega^2 r = 0$

$$\Rightarrow \quad r(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0) \qquad \dot{r}(t) = -A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

An Anfangsbedingungen anpassen $(r(0) = r_0, \dot{r}(0) = 0)$: $\quad \dot{r}(0) = -A\sin(0 + \varphi_0) \quad \Rightarrow \varphi_0 = 0$

$r(0) = A\cos(0) = A \quad \Rightarrow A = r_0 \qquad r(t) = r_0\cos(\omega t)$ mit $\omega^2 = \frac{a}{m_0}$

Dies entspricht einer harmonischen Schwingung. Die Kraft ist linear zur Auslenkung, das Potential harmonisch. Die Koplungskonstante ist dabei mit $a = Gm_0M\frac{1}{R^3}$ gegeben.