Matthias Eibl Blatt 1

Ferienkurs Theoretische Mechanik 2009

Newtonsche Mechanik, Keplerproblem - Lösungen

Aufgaben für Montag

1 Herleitungen zur Vorlesung

Zeigen Sie die in der Vorlesung ausgelassenen Zwischenschritte:

1.
$$\vec{\nabla}U(r) = \frac{dU}{dr}\vec{e}_r \tag{1}$$

2.
$$\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \Big(\frac{dU(r)}{dr}\vec{e}_r\Big) = \frac{d}{dt}\Big(U\big(r(t)\big)\Big) \tag{2}$$

3.
$$m_1\vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_1 + m_2\vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2 = M\vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \mu\vec{r} \times \dot{\vec{r}} \tag{3}$$

4.
$$\frac{d}{dt}\big(M\vec{R} \times \dot{\vec{R}}\big) = 0 \qquad \text{sowie} \qquad \frac{d}{dt}\vec{l} = \frac{d}{dt}\big(\mu\vec{r} \times \dot{\vec{r}}\big) = 0 \tag{4}$$

5.
$$l_z = l = (x\dot{y} - \dot{x}y) = r^2\dot{\phi} \tag{5}$$

6.
$$\frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} \tag{6}$$

7. Bestimmen Sie das Verhältnis von kinetischer und potentieller Energie für ein harmonisches Potential und ein $1/r$-Potential

8.
$$\det\left|\frac{\partial x,y,z}{\partial r,\theta,\phi}\right| = r^2\sin\theta \tag{7}$$

2 Kurze Fragen

1. Ist folgendes Kraftfeld konservativ?

$$\vec{F} = \Big(2x^2 + y, -yz, 4xz^2\Big)^T$$

2. Wie lautet das Potential zu folgenden Kraftfeld?

$$\vec{F} = \Big(y^2z^3 - 6xz^2, 2xyz^3, 3xy2z2 - 6x^2z\Big)^T$$

3. Eine schiefe Ebene liegt austariert auf einer Waage mit Neigungswinkel α. Auf ihr befindet sich, irgendwie befestigt, eine Masse m. Die Waage zeigt ihr Gewicht. Die Befestigung wird nun gelöst, die Masse gleitet reibungsfrei die schiefe Ebene hinab. Ändert sich die Anzeige der Waage?

4. Von einem Turm wird ein Stein reibungsfrei fallen gelassen. Der Turm befinde sich auf nördlichen Halbkugel. Wo fällt der Stein hin? Wie hängt die Lage und Höhe des Turms vom Auftreffort des Steins zusammen?
(Qualitative Antworten)

5. Ein Erdsatellit bewegt sich auf einer Kreisbahn mit der Frequenz ω.
Bestimmen Sie den Radius r der Kreisbahn als Funktion von ω mit dem 3. Keplerschen Gesetz:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(M_E + m_S)} \cdot a^3 \approx \frac{4\pi^2}{GM_E} \cdot a^3$$

Für welchen Radius r_0 ergibt sich eine geostationäre Bahn? (Größenordnung ist ausreichend, $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2}$, $M_E = 5{,}974 \cdot 10^{24}$ kg)

3 Bewegung im 1-dim Potential

Ein Körper der Masse m führt eine eindimensionale Bewegung im Potential $U(x)$ aus.

- Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung $m\ddot{x} = F(x(t))$ durch Integration auf die Form

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{2}\int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{E - U(x')}}} \tag{8}$$

  gebracht werden kann.

- Konkret sei das harmonische Potential $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$ gegeben. Bestimmen Sie $t(x)$ und daraus $x(t)$. (Hinweis: $\int dx \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$)

- Bestimmen Sie mit dem obigen Potential die Umkehrpunkte x_1, x_2 mit $\dot{x_1} = \dot{x_1} = 0$ und berechnen Sie die Periode

$$T = 2\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \tag{9}$$

  der Bewegung. Kommt Ihnen das bekannt vor?

4 Mond im Feld eines Gasplaneten

Ein punktförmiger Mond der Masse m_0 bewege sich im Feld eines dünnen Gasplaneten mit sehr geringer Dichte ρ_0, Masse $M \ll m_0$ und Radius R. Wir nehmen vereinfachend an, die Dichte des Gasplaneten im Innern sei konstant für $r < R$:

$$\rho(r) = \rho_0 \Theta(R - r)$$

wobei $\Theta(x)$ die Heavyside-Funktion ist.

- Zeigen Sie ausgehend vom Ergebnis der Vorlesung für das Gravitationspotential einer beliebigen Massendichteverteilung $\rho(\vec{r})$

$$U(r) = -Gm_0 \int_V d^3x \frac{\rho(\vec{x})}{|\vec{x} - \vec{r}|}$$

  durch explizites Ausführen der Winkelintegration, dass mit einer kugelsymmetrischen Massendichteverteilung $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$ für das Gravitationspotential gilt:

$$U(r) = -4\pi G m_0 \Big(\frac{1}{r}\int_0^r ds s^2 \rho(s) + \int_r^\infty ds s \rho(s) \Big)$$

- Berechnen Sie mit der angegebenen Massendichteverteilung das Gravitationspotential für $r < R$ und für $r > R$ und skizzieren Sie das Ergebnis.
- Bestimmen Sie die auf den Mond der Masse m_0 wirkende Gravitationskraft für $r < R$ und $r > R$ und skizzieren Sie das Ergebnis.
- Der Mond befinde sich nun zu einer Zeit $t = 0$ am Ort $r(0) = r_0 < R, \varphi(0) = 0, \theta(0) = \frac{\pi}{2}$ in Ruhe. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf unter der Annahme, dass wegen der geringen Dichte Reibungseffekte vernachlässigbar sind.
  Lösen Sie die Bewegungsgleichungen.
  Was für eine Bewegung führt der Mond aus?