# Nützliches

Jonas Probst

21.09.2009

## 1 Gradient

### Aufgabe:

Zeigen Sie, dass für eine skalare Funktion $U(r)$ mit $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ gilt:

$$\vec{\nabla} U(r) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} U(r) \, \frac{\vec{r}}{r}$$

### Lösung:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} U(r) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} U(r) \\ \frac{\partial}{\partial y} U(r) \\ \frac{\partial}{\partial z} U(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}r} \frac{\partial r}{\partial x} \\ \frac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}r} \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}r} \frac{\partial r}{\partial z} \end{pmatrix} \\
&= \frac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}r} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \\ \frac{\partial}{\partial y} (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \\ \frac{\partial}{\partial z} (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \end{pmatrix} \\
&= \frac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}r} \begin{pmatrix} \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{pmatrix} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} U(r) \, \frac{\vec{r}}{r}
\end{aligned}$$

## 2 Verschiedene Koordinatensysteme

1. Karthesische Koordinaten $(x, y, z)$

(a) Ortsvektor: $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

(b) Basis ($\hat{e}_x$, $\hat{e}_y$, $\hat{e}_z$):

- $\hat{e}_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\hat{e}_\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\hat{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) infinitesimales Wegstück: $\mathrm{d}\vec{s} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix}$, $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}$

(d) infinitesimales Flächenstück (z.B. in xy-Ebene): $\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

(e) infinitesimales Volumenelement: $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

2. Zylinderkoordinaten $(r, \phi, z)$ (entsprechen bei konstantem $z$ ebenen Polarkoordinaten)

(a) Ortsvektor: $\vec{r} = \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \\ z \end{pmatrix}$ mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

(b) Basis ($\hat{e}_r$, $\hat{e}_\phi$, $\hat{e}_z$)

- $\hat{e}_r = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\hat{e}_\phi = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\hat{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) infinitesimales Wegstück

- in radialer Richtung: $\mathrm{d}\vec{s} = \mathrm{d}r\,\hat{e}_r$
- entlang der Kreisbahn in xy-Ebene: $\mathrm{d}\vec{s} = r\,\mathrm{d}\phi\,\hat{e}_\phi$
- in z-Richtung: $\mathrm{d}\vec{s} = \mathrm{d}z\,\hat{e}_z$

(d) infinitesimales Flächenstück

- entlang eines Zylindermantels mit festem Radius $r$: $\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$
- in einer Ebene bei fester Höhe $z$: $\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r$

(e) infinitesimales Volumenelement: $\mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z$

3. Kugelkoordinaten $(r, \theta, \phi)$

(a) Ortsvektor: $\vec{r} = \begin{pmatrix} r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix}$ mit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

(b) Basis $(\hat{e}_r,\ \hat{e}_\theta,\ \hat{e}_\phi)$

- $\hat{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\phi) \\ \sin(\theta)\sin(\phi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$
- $\hat{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\phi) \\ \cos(\theta)\sin(\phi) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix}$
- $\hat{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) infinitesimales Wegstück:

- entlang einer Kugeloberfläche mit Radius $r$ bei konstantem Polarwinkel $\phi$: $\mathrm{d}\vec{s} = r\,\mathrm{d}\theta\,\hat{e}_\theta$
- entlang einer Kugeloberfläche mit Radius $r$ auf konstanter Höhe $z = r\cos(\theta)$: $\mathrm{d}\vec{s} = r\,\sin(\theta)\,\mathrm{d}\phi\,\hat{e}_\phi$
- entlang eines Weges radial weg vom Ursprung: $\mathrm{d}\vec{s} = \mathrm{d}r\,\hat{e}_r$

(d) infinitesimales Flächenstück auf der Kugeloberfläche mit Radius $r$: $\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}\theta\,r\sin(\theta)\,\mathrm{d}\phi = r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$

(e) infinitesimales Volumenelement: $\mathrm{d}V = \mathrm{d}A\,\mathrm{d}r = r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$

## Aufgabe:

Drücken Sie die kinetische Energie $T = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2$ eines Massenpunktes in karthesischen Koordinaten, in Zylinder- und Kugelkoordinaten aus!

## Lösung:

- karthesische Koordinaten:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

- Zylinderkoordinaten:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2)$$

- Kugelkoordinaten:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\sin^2(\theta)\dot{\phi}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

# 3 Taylorentwicklung

Die Taylorentwicklung einer Funktion $f(x)$ um einen Punkt $a$ lautet:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)\frac{(x-a)}{1!} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \dots$$

- $\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{3!} + \dots$
- $\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots$
- $\mathrm{e}^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$
- $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \frac{x^k}{k!} \approx 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$ für $n \notin \mathbb{N}$

# 4 Differentialgleichungen

1. Eindimensionale Bewegung eines Teilchens im *quadratischen Potential* $U(x) = U_0 + k\frac{x^2}{2}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad m\ddot{\vec{r}} &= -\vec{\nabla}U(x) \\ \Rightarrow \qquad m\ddot{x} &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}U(x) = -kx \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad m\ddot{x} + kx = 0$$

   (a) *Harmonisches Potential* mit $k > 0 \Rightarrow$ Differentialgleichung für den harmonischen Oszillator:

$$\Rightarrow \qquad x(t) = x(0)\cos(\omega t) + \frac{v(0)}{\omega}\sin(\omega t)\,,\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

(b) $k < 0 \Rightarrow$ Kraft unterstützt die Auslenkung!

$$\Rightarrow \qquad x(t) = x(0)\cosh(\omega t) + \frac{v(0)}{\omega}\sinh(\omega t)\,,\ \omega = \sqrt{-\frac{k}{m}}$$

2. *Exponentialfunktion*
   Die e-Funktion liefert einem die Lösung für gewöhnliche lineare Differentialgleichungen $a_0 x(t) + a_1\dot{x}(t) + a_2\ddot{x}(t) + \ldots + a_n x^{(n)}(t) - F(t) = 0$. ($x^{(n)}(t)$ bezeichnet die n-te Ableitung von $x(t)$ nach $t$.) Als Beispiel betrachten wir den angetriebenen, gedämpften Oszillator $m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = F(t)$

   - Bestimmung der allgemeinen Lösung der homogenen DGL ($F(t) = 0$) mit dem Ansatz $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda \mathrm{t}}$

     $$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad m\lambda^2\mathrm{e}^{\lambda t} + \gamma\lambda\mathrm{e}^{\lambda t} + k\mathrm{e}^{\lambda t} &= 0 \\ \Rightarrow \qquad m\lambda^2 + \gamma\lambda + k &= 0 \end{aligned}$$

     $\Rightarrow$ Lösungen des Polynoms$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ bestimmen
     $\Rightarrow$ Allgemeine Lösung der homogenen DGL: $x_{\mathrm{hom}}(t) = c_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \ldots + c_n\mathrm{e}^{\lambda_n t}$

   - Bestimmung einer speziellen Lösung für die inhomogene DGL ($F(t) \neq 0$)

     (a) $F$ zeitunabhängig $\Rightarrow$ konstante spezielle Lösung (alle Ableitungen gleich Null)

     $$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad kx_{\mathrm{inhom}} &= F \\ \Rightarrow \qquad x_{\mathrm{inhom}} &= \frac{F}{k} \end{aligned}$$

     (b) $F(t)$ harmonische Schwingung, z.B. $F(t) = F\cos(\omega t) \Rightarrow$ Ansatz $x_{\mathrm{inhom}}(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$

   - Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL = Summe aus allgemeiner Lösung der homogenen DGL und einer speziellen Lösung der inhomogenen DGL (gilt allgemein!)

3. *Separierbare Differentialgleichungen*: DGL's erster Ordnung der Form $\dot{x}(t) = f\,(x(t))\,g(t)$
   $\Rightarrow$ Ableitung in der Form $\dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ schreiben, Terme die jeweils nur von $x$ bzw. $t$ abhängen auf eine Seite bringen und integrieren:

   $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x)g(t)$$

$$\Rightarrow \qquad \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} = \int_{t_0}^{t} g(t)\mathrm{d}t$$

Beispiel: Radialsymmetrisches Potential

$$\begin{aligned} E &= \frac{m}{2}\dot{r}^2 + U_{\mathrm{eff}}(r) = \mathrm{const} \\ \Rightarrow \qquad \dot{r}(t) &= \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{\mathrm{eff}}(r))} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \\ \Rightarrow \qquad \int_{r(t_0)}^{r(t)} \frac{\mathrm{d}r}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{\mathrm{eff}}(r))}} &= \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t \end{aligned}$$