Lösungen zu den Übungen zur Newtonschen Mechanik

Jonas Probst

20.09.2009

1 Bahnkurve eines Massenpunktes

Aufgabe:

Ein Massenpunkt bewegt sich auf folgender Trajektorie:

$$\vec{r}(t) = (a\cos(\omega t), b\sin(\omega t), ct)$$

1. Skizzieren Sie die Bahnkurve.
2. Bestimmen Sie das Potential U, unter dessen Einfluss sich das Teilchen der Masse m bewegt.
3. Bestimmen Sie die Gesamtenergie E des Teilchens.
4. Bestimmen Sie Drehimpuls und Drehmoment des Teilchens (bezogen auf den Ursprung) für $c = 0$.

Lösung:

1. Das Teilchen bewegt sich auf einer Spiralbahn um die z-Achse. In der xy-Ebene vollführt es eine ellipsenförmige Bewegung mit den Halbachsen a und b, während es sich zugleich mit konstanter Geschwindigkeit c in positive z-Richtung bewegt.

2. Erinnerung: Definition des Potentials U als skalare Funktion, für die gilt: $-\vec{\nabla}U(\vec{r}) = \vec{F}(\vec{r}) = m\ddot{\vec{r}}$
   Also: Bestimmung der Beschleunigung $\ddot{\vec{r}}$, darüber Ermittlung der wirkenden Kraft $\vec{F}$, um daraus U zu gewinnen.

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{r}}(t) &= (-a\omega\sin(\omega t),\, b\omega\cos(\omega t),\, c) \\
\ddot{\vec{r}}(t) &= (-a\omega^2\cos(\omega t),\, -b\omega^2\sin(\omega t),\, 0) \\
&= -\omega^2\vec{r}(t)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{F}(\vec{r}) = m\ddot{\vec{r}} = -m\omega^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad U(\vec{r}) = \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$$

Kontrolle:

$$\vec{\nabla} U(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} U \\ \frac{\partial}{\partial y} U \\ \frac{\partial}{\partial z} U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\omega^2 x \\ m\omega^2 y \\ 0 \end{pmatrix} = -\vec{F}(\vec{r})$$

3. Gesamtenergie des Teilchens:

$$\begin{aligned}
E &= T + U = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + U = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U \\
&= \frac{m}{2}(a^2\omega^2 \sin^2(\omega t) + b^2\omega^2 \cos^2(\omega t) + c^2) + U \\
&= \frac{m}{2}(a^2\omega^2(1 - \cos^2(\omega t)) + b^2\omega^2(1 - \sin^2(\omega t)) + c^2) + U \\
&= \frac{m}{2}(a^2\omega^2 - \omega^2 x^2 + b^2\omega^2 - \omega^2 y^2 + c^2) + \frac{m}{2}\omega^2(x^2 + y^2) \\
&= \frac{m}{2}(a^2\omega^2 + b^2\omega^2 + c^2)
\end{aligned}$$

4. Drehimpuls:

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} = m \begin{pmatrix} a\cos(\omega t) \\ b\sin(\omega t) \\ ct \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a\omega\sin(\omega t) \\ b\omega\cos(\omega t) \\ c \end{pmatrix} \\
&\overset{\text{c=0}}{=} m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ab\omega\cos^2(\omega t) + ba\omega\sin^2(\omega t) \end{pmatrix} \\
&= mab\omega\hat{e}_z
\end{aligned}$$

Drehmoment:

$$\vec{D} = \dot{\vec{L}} = 0$$

Anmerkung:
Dass es sich beim Drehimpuls um eine Erhaltungsgröße handelt, hätte man auch ohne Rechnung erkennen können, da das betrachtete Potential $U(\vec{r}) = U(x^2 + y^2)$ nur vom Abstand $x^2 + y^2$ zur z-Achse abhängt und

damit rotationssymmetrisch bezüglich der z-Achse ist. Aus dem Noether-Theorem (wird in einer der folgenden Vorlesungen wiederholt) folgt daraus die Erhaltung der Projektion des Drehimpulses auf die z-Achse. Und da für $c = 0$ die Bewegung in der xy-Ebene stattfindet, hat der Drehimpuls wegen $\vec{L} \perp \vec{r}(t)$ nur eine Komponente in z-Richtung, womit der gesamte Drehimpuls eine Erhaltungsgröße ist.

2 Energieerhaltung

Aufgabe:

Ein beliebiges Potential $U(\vec{r}, t)$ ist invariant gegenüber zeitlichen Verschiebungen, d.h.:

$$U(\vec{r}, t) = U(\vec{r}, t + a)\,, \ \forall a \in \mathbb{R}$$

Zeigen Sie, dass die Gesamtenergie E eines Massenpunktes in diesem Potential eine Erhaltungsgröße ist.

Lösung:

Als erstes betrachten wir die zeitliche Änderung des Potentials:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U(\vec{r}, t) &= \vec{\nabla} U(\vec{r}, t) \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{\partial}{\partial t} U(\vec{r}, t) \\
&= \vec{\nabla} U(\vec{r}, t) \cdot \dot{\vec{r}} + \lim_{h \to 0} \frac{U(\vec{r}, t + h) - U(\vec{r}, t)}{h} \\
&= \vec{\nabla} U(\vec{r}, t) \cdot \dot{\vec{r}}
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für die Zeitableitung der Energie:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 + U(\vec{r}, t) \right) = m \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} + \vec{\nabla} U(\vec{r}, t) \cdot \dot{\vec{r}} \\
&= \dot{\vec{r}} \cdot (m \ddot{\vec{r}} + \vec{\nabla} U(\vec{r}, t)) = 0
\end{aligned}$$

3 Bewegung in einem allgemeinen radialsymmetrischen Potential

Aufgabe:

Ein Teilchen der Masse m bewege sich unter Einfluss des allgemeinen Zentralpotentials

$$U(r) = -\frac{c}{r^\lambda}\,,$$

wobei $\lambda c > 0$, $\lambda \neq 0$ und zugleich $\lambda < 2$.

1. Wie lautet das zugehörige effektive Potential $U_{\text{eff}}(r)$?

2. Finden Sie die Beziehung zwischen Radius und Drehimpuls, für die sich das Teilchen auf einer *stabilen Kreisbahn* mit Radius r_0 bewegt. Sie können ohne Beweis vorraussetzen, dass $U_{\text{eff}}(r)$ bei geeigneten Energien gebundene Bewegungen erlaubt.

3. Zeigen Sie explizit, dass man für die Kreisfrequenz ω_0 eines Umlaufs auf dieser Kreisbahn folgenden Ausdruck erhält:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c\lambda}{m r_0^{\lambda+2}}}$$

4. Betrachten Sie nun zusätzlich zur Kreisbewegung kleine Schwingungen um die Kreisbahn in *radialer* Richtung.
Wie lautet das effektive Potential für diese radiale Bewegung im Fall kleiner Schwingungen? Führen Sie dazu eine Taylorentwicklung von $U_{\text{eff}}(r)$ bis zum ersten kinematisch relevanten Term durch.

5. Leiten Sie den Zusammenhang zwischen der Kreisfrequenz der radialen Schwingung ω_R und ω_0 her.

6. Welche Beziehung muss λ erfüllen, damit sich trotz kleiner radialer Schwingung periodische, geschlossene Orbits ergeben?

7. Diskutieren Sie das Verhältnis $\frac{\omega_R}{\omega_0}$ für den Fall des Coulomb-Potentials und für den Fall das harmonischen Oszillators.

Lösung:

1. Zur Erinnerung: Das effektive Potential wurde folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned}
E &= \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}r^2\dot{\phi}^2 + U(r) \\
&\overset{L=mr^2\dot{\phi}}{=} \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) \\
&= \frac{m}{2}\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r)
\end{aligned}$$

In unserem Fall ergibt sich:

$$\begin{aligned}
U_{\text{eff}}(r) &= \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) \\
&= \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{c}{r^\lambda}
\end{aligned}$$

2. stabile Kreisbahn mit Radius $r_0 \Leftrightarrow U_{\text{eff}}$ hat Minimum bei r_0

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}U_{\text{eff}}(r) = -\frac{L^2}{mr^3} + \frac{\lambda c}{r^{\lambda+1}} &\stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow \quad -L^2 r^{\lambda+1} + \lambda c m r^3 &= 0 \\ \Rightarrow \quad r^{2-\lambda} &= \frac{L^2}{\lambda c m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad r_0 &= \left(\frac{L^2}{\lambda m c}\right)^{\frac{1}{2-\lambda}} \\ \Rightarrow \quad L_0^2 &= r_0^{2-\lambda}\lambda m c \end{aligned}$$

U_{eff} erlaubt gebundene Zustände $\Leftrightarrow U_{\text{eff}}$ besitzt ein lokales Minimum
U_{eff} besitzt nur ein lokales Extremum bei $r_0 \Rightarrow U_{\text{eff}}$ hat Minimum bei r_0

3. Die Kreisfrequenz ω_0 erhält man über den Drehimpuls $L = mr^2\dot{\phi}$ der Kreisbewegung:

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= \dot{\phi}_0^2 = \frac{L_0^2}{m^2 r_0^4} \\ &= \frac{r_0^{2-\lambda}\lambda m c}{m^2 r_0^4} = \frac{\lambda c}{m r_0^{\lambda+2}} \\ \Rightarrow \quad \omega_0 &\stackrel{\text{o.E}\,\omega_0>0}{=} \sqrt{\frac{\lambda c}{m r_0^{\lambda+2}}} \end{aligned}$$

4. Für betrachten kleine Abweichungen vom Kreisbahnradius $r - r_0$ und führen dafür eine Taylorentwicklung des effektiven Potentials U_{eff} bis zum "ersten kinematisch relevanten Term", also bis zur zweiten Ordnung durch:

$$\begin{aligned} U_{\text{eff}}(r) &\approx U_{\text{eff}}(r_0) + (r-r_0)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}U_{\text{eff}}(r_0) + \frac{(r-r_0)^2}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}U_{\text{eff}}(r_0) \\ &= U_{\text{eff}}(r_0) + \frac{(r-r_0)^2}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}U_{\text{eff}}(r_0) \end{aligned}$$

Für die zweite Ableitung von U_{eff} an der Stelle r_0 erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}U_{\text{eff}}(r_0) &= \frac{3L_0^2}{m r_0^4} - \frac{(\lambda+1)\lambda c}{r_0^{\lambda+2}} \\ &= \frac{3 r_0^{2-\lambda}\lambda m c}{m r_0^4} - \frac{(\lambda+1)\lambda c}{r_0^{\lambda+2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{3\lambda c}{r_0^{\lambda+2}} - \frac{(\lambda+1)\lambda c}{r_0^{\lambda+2}} \\ &= \frac{(2-\lambda)\lambda c}{r_0^{\lambda+2}} \end{aligned}$$

Für die Taylorentwicklung von U_{eff} ergibt sich damit:

$$U_{\text{eff}}(r) = U_{\text{eff}}(r_0) + \frac{(r-r_0)^2}{2} \cdot \frac{(2-\lambda)\lambda c}{r_0^{\lambda+2}}$$

5. Um einen Zusammenhang zwischen der Winkelgeschwindigkeit der Kreisbewegung ω_0 und der Winkelgeschwindigkeit der radialen Schwingung ω_{R} herstellen zu können, müssen wir uns erst einmal überlegen, was wir unter ω_{R} zu verstehen haben. In der vorhergehenden Teilaufgabe haben wir das effektive Potential um ein Minimum bis zur zweiten Ordnung entwickelt. Dadurch erhält man allgemein wie auch in unserem speziellen Fall ein harmonisches Potential, das zu einer harmonischen Schwingung des Massenpunktes um das Potentialminimum führt, denn:

$$\begin{aligned} m\ddot{r} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} U_{\text{eff}}(r) &= 0 \\ m\ddot{r} + (r-r_0) \cdot \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} U_{\text{eff}}(r_0) &= 0 \\ m\ddot{r} + (r-r_0) \cdot \frac{(2-\lambda)\lambda c}{r_0^{\lambda+2}} &= 0 \end{aligned}$$

Substitution: $\xi = r - r_0$

$$\Rightarrow \qquad m\ddot{\xi} + \xi \cdot \frac{(2-\lambda)\lambda c}{r_0^{\lambda+2}} = 0$$

Nach Vorraussetzung gilt $\lambda c > 0$ und $\lambda < 2$, wir können also setzen: $\omega_{\mathrm{R}}^2 = \frac{1}{m}\frac{(2-\lambda)\lambda c}{r_0^{\lambda+2}}$. Damit erigbt sich für die kleine Auslenkung ξ aus dem Kreisbahnradius r_0 die Differentialgleichung für den harmonischen Oszillator:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + \omega_{\mathrm{R}}^2 \xi &= 0 \\ \Rightarrow \qquad \xi(t) &= A\cos(\omega_{\mathrm{R}} t) + B\sin(\omega_{\mathrm{R}} t) \end{aligned}$$

Damit können wir nun den gesuchten Zusammenhang zwischen ω_{R} und ω_0 angeben:

$$\frac{\omega_{\mathrm{R}}}{\omega_0} = \frac{\sqrt{\frac{(2-\lambda)\lambda c}{m r_0^{\lambda+2}}}}{\sqrt{\frac{\lambda c}{m r_0^{\lambda+2}}}} = \sqrt{2-\lambda}$$

6. Damit sich geschlossene, periodische Orbits ergeben, muss sich das Teilchen nach regelmäßigen Abständen wieder am selben Ort befinden. Dazu muss es eine Zeitspanne geben, nach der sowohl die Kreisbewegung mit ω_0 als auch die radiale Schwingung mit ω_{R} synchron an ihren Ausganspunkt gelangt sind, denn dann befindet sich das Teilchen insgesamt wieder an seinem Ausgangsort. Die Kreisbewegung befindet sich nach der Zeit $n \cdot T_0 = n \cdot \frac{2\pi}{\omega_0}$, $n \in \mathbb{N}$ wieder in ihrem Ausganszustand, für die radiale Schwingung ist das nach der Zeit $k \cdot T_{\mathrm{R}} = k \cdot \frac{2\pi}{\omega_{\mathrm{R}}}$, $k \in \mathbb{N}$ der Fall. Wir suchen nun eine Zeit, nach der beide Bedingungen erfüllt sind, für die also gilt:

$$\begin{aligned} nT_0 &= kT_{\mathrm{R}} \\ \Rightarrow \quad \frac{\omega_{\mathrm{R}}}{\omega_0} &= \frac{n}{k} \\ \Rightarrow \quad \sqrt{2-\lambda} &\in \mathbb{Q} \end{aligned}$$

7. Für den harmonischen Oszillator ($\lambda = -2$) erhält man $\frac{\omega_{\mathrm{R}}}{\omega_0} = \sqrt{2+2} = 2$
$\Rightarrow$ Die radiale Schwingung oszilliert doppelt so schnell wie die Kreisbewegung, nach zwei Perioden der Kreisbewegung befindet sich der Massenpunkt wieder an seinem Ausgangsort.

   Für das Coulomb-Potential ($\lambda = 1$) erhält man $\frac{\omega_{\mathrm{R}}}{\omega_0} = \sqrt{2-1} = 1$
$\Rightarrow$ Radiale Schwingung und Kreisbewegung finden mit derselben Winkelgeschwindigkeit statt, die Periode der Bewegung entspricht derjenigen der ungestörten Kreisbewegung.

4 Bewegung in einem speziellen radialsymmetrischen Potential

Aufgabe:

Ein Massenpunkt der Masse m bewege sich in folgendem Zentralpotential:

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r^2}\ , \ \alpha > 0$$

1. Wie lautet die Energie E des Teilchens?

2. Unter welchen Bedingungen kann der Massenpunkt das Zentrum des Potentials ($r \to 0$) erreichen, wenn sein Drehimpuls $L \neq 0$ ist? Welche Besonderheit ergibt sich für den Fall $L^2 = 2m\alpha$?

3. Wir betrachten nun den Fall ins Zentrum eines Körpers, der sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Abstand $r(t = 0) = r_0$ befindet und keine Radialbewegung

besitzt ($\dot{r}(t=0)=0$). Sein Drehimpuls $L \neq 0$ erlaubt ihm, das Zentrum zu erreichen. Die Abkürzung $\lambda = -\frac{L^2-2m\alpha}{2m}$ kann hilfreich sein.

(a) Berechnen Sie die dafür benötigte Zeit und weisen Sie damit nach, dass diese endlich ist.

(b) Zeigen Sie, dass allerdings die Winkelgeschwindigkeit und auch die Geschwindigkeit des Teilchens für $r \to 0$ gegen Unendlich gehen.

Lösung:

1. Für die Energie des Teilchens erhält man:

$$\begin{aligned} E &= \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) \\ &= \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r^2} \\ &= \frac{m}{2}\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) \end{aligned}$$

2. Um die Frage, unter welchen Bedingungen der Massenpunkt das Zentrum erreichen kann, zu beantworten, betrachten wir das effektive Potential $U_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2-2m\alpha}{2mr^2}$ mit $L \neq 0$ (Skizze!):
Für $L^2 - 2m\alpha > 0$ ergibt sich $U_{\text{eff}}(r) \to \infty$ für $r \to 0$, ein Sturz ins Zentrum ist in diesem Fall wegen $E \geqq U_{\text{eff}}(r)$ nicht möglich. Für $L^2 - 2m\alpha < 0$ dagegen erhält man $U_{\text{eff}}(r) < 0\, \forall r$ und $U_{\text{eff}}(r) \to -\infty$ für $r \to 0$. In diesem Fall führt stürzt der Massenpunkt also ins Zentrum, da er für jeden Abstand r in Richtung des Zentrums beschleunigt wird (an jeder Stelle gilt: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}U_{\text{eff}}(r) > 0 \Rightarrow m\ddot{r} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}U_{\text{eff}}(r) < 0$).
Für den speziellen Fall $L^2 = 2m\alpha$ verschwindet das effektive Potential. Damit ist der "radiale Impuls" des Teilchens $m\dot{r}$ konstant, das Teilchen stürzt entweder mit konstanter Radialgeschindigkeit $\dot{r}$ ins Zentrum oder entfernt sich mit konstantem $\dot{r}$ vom Zentrum.

3. Fall ins Zentrum $\Rightarrow L^2 - 2m\alpha \leqq 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{L^2-2m\alpha}{2m} \geqq 0$

   (a) Für die (konstante) Energie des Teilchens erhält man über Betrachtung des Zeitpunktes $t = 0$:

$$\begin{aligned} E &= \frac{m}{2}\dot{r}^2(t=0) + U_{\text{eff}}(r_0) \\ &= \frac{L^2-2m\alpha}{2mr_0^2} \\ &= -\frac{\lambda}{r_0^2} < 0 \end{aligned}$$

Über die Energie zu einem beliebigen Zeitpunkt lässt sich nun die Formel zur Berechnung der Zeitdauer herleiten:

$$\begin{aligned} E &= \frac{m}{2}\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) \\ \Rightarrow \qquad \dot{r} &= \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{\text{eff}}(r))} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \\ \Rightarrow \qquad \mathrm{d}t &= \frac{\mathrm{d}r}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{\text{eff}}(r))}} \end{aligned}$$

Für die Dauer Δt des Sturzes ins Zentrum vom Ausgangspunkt $r(t = 0) = r_0$ aus berechnet man (das Vorzeichen von $\dot{r}$ ist hierbei negativ, da das Teilchen seinen Abstand zum Ursprung verringert):=

$$\begin{aligned} \Delta t &= \int_{r_0}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{-\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{\text{eff}}(x))}} = \int_{0}^{r_0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{\text{eff}}(x))}} \\ &= \int_{0}^{r_0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2}{m}(-\frac{\lambda}{r_0^2} + \frac{\lambda}{x^2})}} = \int_{0}^{r_0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2}{m} \cdot \frac{\lambda(r_0^2 - x^2)}{r_0^2 x^2}}} \\ &= \int_{0}^{r_0} \frac{r_0 x \mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2}{m}\lambda} \cdot \sqrt{r_0^2 - x^2}} \end{aligned}$$

Substitution: $u = x^2 \Rightarrow \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{2x}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad \Delta t &= \frac{r_0\sqrt{m}}{2\sqrt{2\lambda}} \int_0^{r_0^2} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{r_0^2 - u}} \\ &= \frac{r_0\sqrt{m}}{2\sqrt{2\lambda}} \left[-2\sqrt{r_0^2 - u}\right]_0^{r_0^2} \\ &= \frac{r_0\sqrt{m}}{\sqrt{2\lambda}} \cdot (-0 + \sqrt{r_0^2}) \\ &= \frac{r_0^2\sqrt{m}}{\sqrt{2\lambda}} \end{aligned}$$

(b) Drehimpulserhaltung:

$$L = mr^2\dot{\phi} = \text{const}$$

$$\Rightarrow \qquad \dot{\phi} = \frac{L}{mr^2} \ \to \infty \text{ für } r \ \to 0$$

Energieerhaltung:

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) = \text{const}$$

$$\Rightarrow \qquad \dot{r}^2 = \frac{2}{m}(E - U_{\text{eff}}(r)) \to \frac{2}{m}(E - (-\infty)) = \infty \text{ für } r \to 0$$

5 Gravitationsfeld der Erde

Aufgabe:

Ein Körper der Masse m bewegt sich *ausschließlich radial* im Gravitationsfeld der Erde (Radius R, Masse M)..

1. Wie lauten die Gravitationskraft und das Gravitationspotential, die auf den Körper im Abstand r vom Erdmittelpunkt wirken.
2. Geben Sie die Gesamtenergie des Körpers im Gravitationsfeld an. Die Anfangsgeschwindigkeit des Körpers in seinem Startpunkt auf der Erdoberfläche sei v_0. Wie groß ist seine Geschwindigkeit v in Abhängigkeit des Abstandes r vom Erdmittelpunkt?
3. Wie groß muss die Anfangsgeschwindigkeit v_0 mindestens sein, damit der Körper das Gravitationspotential der Erde überwinden kann?
4. Wie lautet der Zusammenhang zwischen Gravitationskonstante G und der lokalen Gravitationsbeschleunigung g an der Erdoberfläche?
5. Die International Space Station kreist in einer Umlaufbahn ca. $d = 350\,\text{km}$ über der Erdoberfläche ($R = 6400\,\text{km}$). Wie groß ist dort in etwa die lokale Gravitationsbeschleunigung g_{ISS} im Vergleich zu g auf der Erdoberfläche? Weshalb spricht man trotzdem von Schwerelosigkeit?

Lösung:

1. Wenn man den Ursprung des Koordinatensystems in den Erdmittelpunkt legt, ergibt sich für die Gravitationskraft auf den Körper am Ort $\vec{r}$:

   $$\vec{F}(\vec{r}) = -G\frac{mM}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = F(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

   Das radialsymmetrische Gravitationspotential lautet demnach:

   $$U(r) = -G\frac{mM}{r}$$

   Kontrolle:

   $$-\vec{\nabla}U(r) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}U(r)\frac{\vec{r}}{r} = -G\frac{mM}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \vec{F}(\vec{r})$$

2. Da er nach Vorraussetzung nur radiale Bewegungen ausführen soll, lautet die Gesamtenergie E des Körpers:

$$\begin{aligned} E &= T + U(r) \\ &= \frac{m}{2}\dot{r}^2 - G\frac{mM}{r} \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit $v(r)$ in Abhängigkeit des Abstandes zum Erdmittelpunkt erhält man über die Energieerhaltung:

$$\begin{aligned} E &= \frac{m}{2}v_0^2 - G\frac{mM}{R} = \text{const} \\ &= \frac{m}{2}v^2(r) - G\frac{mM}{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad \frac{m}{2}v^2(r) &= \frac{m}{2}v_0^2 + GmM(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}) \\ \Rightarrow \qquad v(r) &= \sqrt{v_0 + 2GM(\frac{1}{r} - \frac{1}{R})} \end{aligned}$$

(Das Vorzeichen von $v(r) = \dot{r}(r)$ ist positiv, weil wir davon ausgehen, dass sich das Teilchen nicht in die Erdoberfläche hineinbewegt...)

3. Außerhalb des Gravitationspotentials der Erde, also für $r \to \infty$ beträgt die potentielle Energie des Teilchens $U(r \to \infty) = 0$. Damit sich das Teilchen dort aufhalten kann, muss es also wegen $E \geqq U_{\text{eff}}$ eine positive Energie besitzen. Nach Energieerhaltung muss also auch am Startpunkt auf der Erdoberfläche gelten:

$$E = \frac{m}{2}v_0^2 - G\frac{mM}{R} \geqq 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad \frac{m}{2}v_0^2 &\geqq G\frac{mM}{R} \\ \Rightarrow \qquad v_0 &\geqq \sqrt{\frac{2GM}{R}} \end{aligned}$$

4. Auf der Erdoberfläche gilt:

$$F(R) = -mg = -G\frac{mM}{R^2}$$

$$\Rightarrow \qquad g = G\frac{M}{R^2}$$

5. Auf der ISS gilt:

$$F(R+d) = -mg_{\text{Iss}} = -G\frac{mM}{(R+d)^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad \frac{g_{\text{ISS}}}{g} &= \frac{R^2}{(R+d)^2} \\ &= \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{g_{\text{ISS}}}{g} = \frac{R^2}{(R+d)^2} \approx 0.9$$

Die Raumstation nutzt bei ihrer Umkreisung der Erde die Gravitationskraft als Zentripetalkraft. Im Bezugssystem eines Besatzungsmitgliedes auf der ISS wirkt daher noch die Zentrifugalkraft, die stets radial vom Mittelpunkt der Kreisbahn, dem Gravitationszentrum, wegweist und die Schwerkraft damit genau kompensiert. Deswegen ist es berechtigt trotz einer noch sehr hohen Gravitationsbeschleunigung g_{ISS} von Schwerelosigkeit zu sprechen.