Ferienkurs Experimentalphysik 4
2009

Übung 5 - Musterlösung

1 Matrixelement

Man zeige durch ausrechnen, dass das Dipolmatrixelement $\int \psi_i^* \vec{r} \psi_k d\tau$ für den Übergang $1s \rightarrow 2s$ im H-Atom Null ist.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\frac{M_{ik}}{e} &= \int \psi(2s) \cdot \vec{r} \cdot \psi(1s) d\tau \\
&= \frac{1}{4\pi\sqrt{2}a_0^3} \cdot \int \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-\frac{r}{2a_0}} \vec{r} e^{-\frac{r}{a_0}} d\tau \\
&= a \int\int\int \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-\frac{3r}{2a_0}} \vec{r} \cdot r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi
\end{aligned}$$

Für die x-Koordinate:

$$\frac{(M_{ik})_x}{e} = a \cdot \int\int\int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-\frac{3r}{2a_0}} \cdot x r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

Wegen $x = r \cdot \sin\theta \cos\theta$ ergibt φ Integration:

$$\sin\varphi\Big|_0^{2\pi} = 0$$

Entsprechendes gilt für $(M_{ik})_y$ mit $y = r \cdot \sin\theta \sin\varphi$. Für $(M_{ik})_z$ folgt wegen $z = r \cdot \cos\theta$ bei Integration über θ:

$$\int_{\theta=\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos\theta d\theta = \frac{1}{2} \sin^2\theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = 0$$

2 Linienbreite

Wie groß sind Übergangswahrscheinlichkeit und natürliche Linienbreite des Übergangs $3s \rightarrow 2p$ im H-Atom, wenn die Lebensdauern der Zustände $\tau(3s) = 23ns$ und $\tau(2p) =$

$2,1\mu s$ betragen? Vergleichen Sie dies mit der Dopplerbreite dieses Übergangs bei $T = 300K$.

Lösung: Das $3s$-Niveau kann nur in das $2p$-Niveau zerfallen. Deshalb ist die Übergangs Wahrscheinlichkeit für den Übergang $3s \rightarrow 2p$:

$$A_{ik} = \frac{1}{\tau(3s)} = \frac{10^9}{23} s^{-1} = 4,3 \cdot 10^7 s^{-1}$$

Die natürliche Linienbreite ist

$$\delta\nu_n = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\tau(3s)} + \frac{1}{\tau(2p)}\right) = 83MHz$$

$$\delta\nu_D = 7.16 \cdot 10^{-7}\nu_{ik} \cdot \sqrt{\frac{T}{M}}\sqrt{\frac{mol}{gK}} = 5,67GHz$$

$$M = 1\frac{g}{mol} \quad , \quad T = 300K$$

$$\frac{\delta\nu_n}{\delta\nu_d} = 0,014$$

3 Absorption

Metastabile $He(2^1S_0)$- Atome in einer Gasentladungszelle bei $T = 1000K$ absorbieren Licht auf dem Übergang $2^1S_0 \rightarrow 3^1P_1$. Die Termwerte der Niveaus sind $166272cm^{-1}$ und $186204cm^{-1}$, die Lebensdauern $\tau(3^1P_1) = 1,4ns$, $\tau(2^1S_0) = 1ms$

(a) Bei welcher Wellenlänge liegt die entsprechende Resonanzlinie?

(b) Wie groß ist ihre natürliche Linienbreite?

(c) Wie groß ist die Dopplerbreite?

Lösung:

(a) Die Wellenlänge λ des Übergangs zwischen T_i und T_k ist

$$\lambda_{ik} = \frac{1}{T_{ik} - T_k} = 501,7nm$$

(b) Die natürliche Linienbreite ist

$$\delta\nu_n \leq \frac{1}{2\pi\tau_i} + \frac{1}{2\pi\tau_k} = \frac{10^9}{2\pi \cdot 1,4} + \frac{10^3}{2\pi} = 1,14 \cdot 10^8 s^{-1}$$

(c)

$$\delta\nu_d = 7,16 \cdot 10^{-7} \cdot \underbrace{\nu_0}_{\frac{c}{\lambda}} \cdot \sqrt{\frac{T}{M}} \sqrt{\frac{mol}{g \cdot K}}$$

$$T = 10^3 K, \qquad M = 4\frac{g}{mol}$$

$$\Rightarrow \delta\nu_0 = 6,77 \cdot 10^9 s^{-1} = 6,77 GHz$$

4 Chlorwasserstoff

Flüssiger Chlorwasserstoff kann neben Wasser auch mit schwerem Wasser (D) hergestellt werden. Nehmen Sie den Gleichgewichtsabstand r_0 für beide Moleküle gleich mit $r_0 = 1,4 \cdot 10^{-10} m$ an und zeigen Sie, dass damit ein Frequenzunterschied für den Übergang zwischen den Rotationszuständen mit $j = 1$ und $j = 0$ folgt. Die Moleküle dürfen als starre Rotoren gesehen werden.

Lösung:

$$E_j = \frac{\hbar^2}{2 \cdot I} \cdot j(j+1)$$

$$\Delta\nu = \nu(DCl) - \nu(HCL)$$

$$\nu(DCl) = \frac{\Delta E_{0,1}}{h} = \frac{\hbar}{2\pi I}$$

Trägheitsmoment:

$$I_{HCl} = \mu \cdot r_0^2 = \underbrace{\frac{m_H \cdot m_{Cl}}{m_H + m_{Cl}}}_{\mu_{HCl}} r_0^2$$

$$\Rightarrow \Delta\nu = \frac{\hbar}{2\pi r_0^2} \left(\frac{1}{\mu_{DCl}} - \frac{1}{\mu_{HCl}} \right) \neq 0$$