

FERIENKURS EXPERIMENTALPHYSIK 4

2009

Übung 3 - Lösung

1 Drehimpulsoperatoren bei Spin-Bahn-Kopplung

Bei Berücksichtigung der Spin-Bahn-Kopplung lautet der Hamiltonoperator des Wasserstoffatoms

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \Gamma \hat{S} \cdot \hat{L} \quad (1)$$

Dabei ist \hat{H}_0 der ungestörte Hamiltonoperator ohne Spin-Bahn-Kopplung und Γ die Spin-Bahn-Kopplungskonstante. Zeigen Sie, dass weder \hat{L}_z noch \hat{S}_z mit \hat{H} kommutieren. Hinweis: Benutzen Sie die allgemeingültige Kommutatorrelation

$$[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$$

Beweis:

$$B[A, C] + [A, B]C = B(AC - CA) + (AB - BA)C = ABC - BCA = [A, BC]$$

Lösung \hat{L}_z und \hat{S}_z kommutieren mit \hat{H}_0 . Wir müssen deshalb folgende Kommutatoren auswerten

$$[\hat{L}_z, \hat{S} \cdot \hat{L}] \qquad [\hat{S}_z, \hat{S} \cdot \hat{L}]$$

$$\begin{aligned} [\hat{L}_z, \hat{S} \cdot \hat{L}] &= [\hat{L}_z, \hat{S}_x \hat{L}_x + \hat{S}_y \hat{L}_y + \hat{S}_z \hat{L}_z] = \\ &= [\hat{L}_z, \hat{S}_x \hat{L}_x] + [\hat{L}_z, \hat{S}_y \hat{L}_y] + [\hat{L}_z, \hat{S}_z \hat{L}_z] = \\ &= \hat{S}_x [\hat{L}_z, \hat{L}_x] + [\hat{L}_z, \hat{S}_x] \hat{L}_x + \hat{S}_y [\hat{L}_z, \hat{L}_y] + [\hat{L}_z, \hat{S}_y] \hat{L}_y + \hat{S}_z [\hat{L}_z, \hat{L}_z] + [\hat{L}_z, \hat{S}_z] \hat{L}_z = \\ &= i\hbar (\hat{S}_x \hat{L}_y - \hat{S}_y \hat{L}_x) \neq 0 \end{aligned}$$

Analog erhält man

$$[\hat{S}_z, \hat{S} \cdot \hat{L}] = i\hbar (\hat{S}_y \hat{L}_x - \hat{S}_x \hat{L}_y) = -[\hat{L}_z, \hat{S} \cdot \hat{L}]$$

b) L_z und S_z sind somit keine Erhaltungsgrößen mehr. Für \hat{S}^2 und \hat{L}^2 gilt allerdings immer noch

$$[\hat{S}^2, \hat{H}] = [\hat{L}^2, \hat{H}] = 0$$

Zur Beschreibung des Zustands führt man den Gesamtdrehimpuls $\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$ ein.

b) Zeigen Sie zunächst, dass \hat{J} in der Tat ein Drehimpulsoperator im Sinne der Quantenmechanik ist, das heißt, dass die Komponenten von \hat{J} den fundamentalen Vertauschungsrelationen genügen

$$\begin{aligned} i\hbar\hat{J}_x &= [\hat{J}_y, \hat{J}_z] \\ i\hbar\hat{J}_y &= [\hat{J}_z, \hat{J}_x] \\ i\hbar\hat{J}_z &= [\hat{J}_x, \hat{J}_y] \end{aligned}$$

Es genügt eine der Relationen explizit zu beweisen.

Zeigen sie dann, dass mit dem so definierten Gesamtdrehimpuls \hat{J}_z und \hat{J}^2 mit \hat{H} kommutieren. J^2 und J_z sind somit wieder Erhaltungsgrößen und eignen sich deshalb zur Beschreibung des Systems bei Spin-Bahn-Kopplung.

Lösung

$$\begin{aligned} [\hat{J}_y, \hat{J}_z] &= [\hat{L}_y + \hat{S}_y, \hat{L}_z + \hat{S}_z] = \\ &= [\hat{L}_y, \hat{L}_z] + [\hat{L}_y, \hat{S}_z] + [\hat{S}_y, \hat{L}_z] + [\hat{S}_y, \hat{S}_z] = \\ &= i\hbar(\hat{L}_x + \hat{S}_x) = i\hbar\hat{J}_x \end{aligned}$$

Analog kann man die anderen Relationen zeigen.

$$\begin{aligned} [\hat{J}^2, \hat{H}] &= [\hat{L}^2 + 2\hat{L} \cdot \hat{S} + \hat{S}^2, \hat{H}] = \\ &= [\hat{L}^2, \hat{H}] + 2[\hat{L} \cdot \hat{S}, \hat{H}] + [\hat{S}^2, \hat{H}] = \\ &= 2[\hat{L} \cdot \hat{S}, \hat{H}_0] + 2[\hat{L} \cdot \hat{S}, \hat{S} \cdot \hat{L}] = \\ &= 2[\hat{L}_x\hat{S}_x + \hat{L}_y\hat{S}_y + \hat{L}_z\hat{S}_z, \hat{H}_0] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\hat{J}_z, \hat{H}] &= [\hat{L}_z + \hat{S}_z, \hat{H}] = \\ &= [\hat{L}_z, \hat{H}_0] + [\hat{S}_z, \hat{H}_0] + [\hat{L}_z, \hat{S} \cdot \hat{L}] + [\hat{S}_z, \hat{S} \cdot \hat{L}] = \\ &= i\hbar(\hat{S}_x\hat{L}_y - \hat{S}_y\hat{L}_x) + i\hbar(\hat{S}_y\hat{L}_x - \hat{S}_x\hat{L}_y) = 0 \end{aligned}$$

2 Hyperfeinstruktur im starken Magnetfeld

In einem Atomstrahlexperiment wird ein Strahl von $^{23}\text{Na}(^2S_{1/2})$ -Atomen durch ein starkes, inhomogenes Feld B geschossen (Paschen-Back-Bereich). Was passiert mit der Kopplung von I und J zu F ? Man beobachtet, dass der Strahl in acht Teilstrahlen aufspaltet. Wie groß ist die Zusatzenergie ΔE ? Wie groß ist die Kernspinquantenzahl i von ^{23}Na ? Skizzieren Sie schematisch die Aufspaltung.

Lösung Der Kernspin I und der Gesamtdrehimpuls J werden durch das starke Feld entkoppelt. Die Kopplung von L und S bricht erst bei viel stärkeren Magnetfeldern auf. Die Quantisierungsachsen von I und J richten sich deshalb unabhängig voneinander längs der Magnetfeldrichtung aus. Für die Energie im Magnetfeld gilt deswegen völlig analog zum normalen Zeeman-Effekt

$$\Delta E = g_j \mu_B m_j B - g_i \mu_K m_i B$$

wobei zu beachten ist, dass das magnetische Moment des Kerns wegen der positiven Kernladung positiv ist. Aus der Aufgabenstellung wissen wir, dass $j = \frac{1}{2}$ ist. m_j kann deshalb nur die zwei Werte $\pm \frac{1}{2}$ annehmen. Da acht Teilstrahlen beobachtet werden, muss m_i vier verschiedene Werte besitzen. Die magnetische Quantenzahl besitzt $2i + 1$ verschiedene Werte. Somit gilt für den Kernspin $i = \frac{3}{2}$.

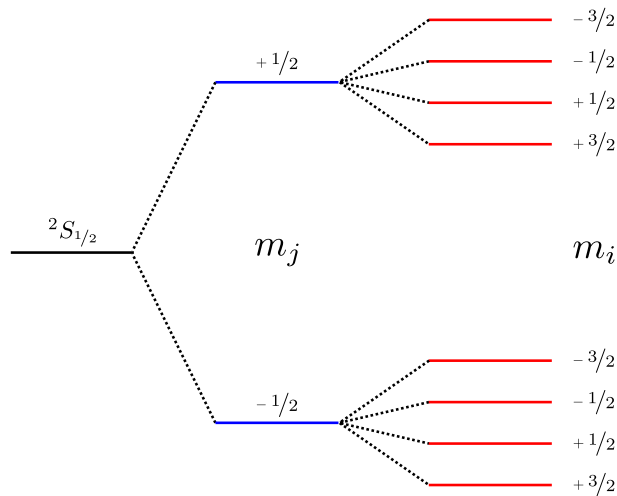


Abbildung 1: Hyperfeinstruktur von Na im starken Magnetfeld. Durch das starke Feld entkoppeln J und I . Da m_j zwei Werte ($\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$) und m_i vier Werte annehmen kann, spaltet das $^2S_{1/2}$ Niveaus in $2 \cdot 4$ Unterniveaus auf. Die Aufspaltung im Bild ist nicht maßstabsgetreu gezeichnet.

3 Aufspaltung im Magnetfeld

a) Skizzieren Sie die Aufspaltung im Magnetfeld eines p und eines d -Niveaus, wobei der Spin vernachlässigt werden soll, und beschriften Sie die Unterniveaus mit den jeweiligen Werten der magnetischen Quantenzahl m . Wie groß ist diese Aufspaltung? In wieviele Unterniveaus zerfällt ein Niveau mit gegebenem l ?

Lösung Beim normalen Zeeman-Effekt (S vernachlässigt) zerfällt ein Niveau mit gegebener Quantenzahl l in $2l + 1$ äquidistante Unterniveaus. Der energetische Abstand der Unterniveaus beträgt

$$\Delta E = \mu_B \cdot B$$

Abbildung 2 zeigt die Aufspaltung eines p ($l = 1$) und eines d -Niveaus ($l = 2$).

b) Wieviele unterschiedliche Linien sind beim Übergang von einem d -Niveau in ein p -Niveau zu beobachten? (Berücksichtigen Sie die relevante Auswahlregel!)

Lösung Nicht alle möglichen Übergänge zwischen den Niveaus sind erlaubt. Für elektrische Dipolübergänge gelten folgende Auswahlregeln:

$$\begin{aligned}\Delta m &= 0, \pm 1 \\ \Delta l &= \pm 1 \\ (\Delta s &= 0)\end{aligned}$$

Die erlaubten Übergänge sind in Abb. 2 eingezeichnet. Da die Aufspaltung äquidistant und unabhängig von l ist, haben alle Übergänge mit gleichem Δm die gleiche Energie. Deshalb beobachtet man nur drei Spektrallinien ($\Delta m = -1, 0, 1$).

c) Bei Emission parallel zur Richtung des Magnetfeldes beobachtet man zirkular polarisierte Strahlung, senkrecht zur Feldrichtung dagegen linear polarisierte Strahlung. Wie erklären Sie das Auftreten unterschiedlicher Polarisationsarten und die Richtungsverteilung der Emission?

Lösung Das Auftreten unterschiedlicher Polarisation ist eine Folge der Drehimpulserhaltung. Bei einem Dipolübergang gilt wegen der Auswahlregel für m

$$\begin{aligned}\Delta L_z &= 0 \\ \text{oder} \\ \Delta L_z &= \pm \hbar\end{aligned}$$

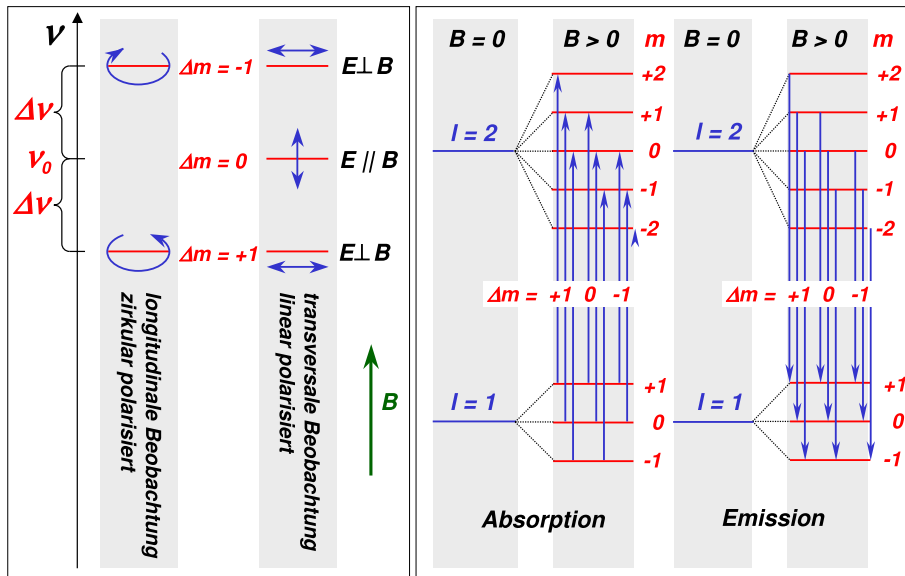


Abbildung 2: Normale Zeeman-Aufspaltung des p und d -Niveaus in einem äußeren Magnetfeld. Man beobachtet unabhängig von l immer 3 Spektrallinien mit je nach Beobachtungsrichtung unterschiedlicher Polarisation. [Gross, Vorlesung Experimentalphysik 4, 2003]

Der Gesamtimpuls des Systems muss bei der Emission erhalten bleiben. Ein zirkular polarisiertes Photon besitzt einen Drehimpuls $\pm\hbar$. Ein linear polarisiertes Photon kann als Überlagerung aus einem links- und einem rechtszirkular polarisierten Zustand beschrieben werden. Deshalb verschwindet der Erwartungswert seines Drehimpulses.

Aus diesen Überlegungen folgt, dass wir für $\Delta m = \pm 1$ zirkular polarisierte Strahlung und für $\Delta m = 0$ linear polarisierte Strahlung erhalten.

Die Richtungsabhängigkeit der Polarisation ergibt sich wie folgt:

Der Drehimpuls des Photons zeigt in Ausbreitungsrichtung. Nach obigen Überlegungen besitzt zirkular polarisierte Strahlung wegen $\Delta L_z = \pm\hbar$ einen Drehimpuls der längs der z -Richtung (Magnetfeldrichtung) zeigt. Die Ausbreitung erfolgt deshalb parallel zum Magnetfeld.

Für $\Delta m = 0$ kann man zeigen (siehe z.B. Groß, Vorlesung Experimentalphysik 4, 2003, Kapitel 6.4), dass die Abstrahlcharakteristik der eines in Feldrichtung schwingenden Dipols entspricht. Ein Dipol emittiert in Schwingungsrichtung (hier die z -Richtung) keine Strahlung. Das erklärt das Fehlen linear polarisierter Strahlung parallel zur Feldrichtung. Senkrecht zur Schwingungsrichtung emittiert der Dipol Strahlung, die linear in Feldrichtung polarisiert ist.

Man beobachtet jedoch zusätzlich linear polarisierte Strahlung senkrecht zur Feldrichtung deren Polarisationsrichtung um 90° gedreht ist. Dies wird klar wenn man bedenkt, dass zirkular polarisierte Strahlung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung linear polarisiert

erscheint (siehe Abb. 3)

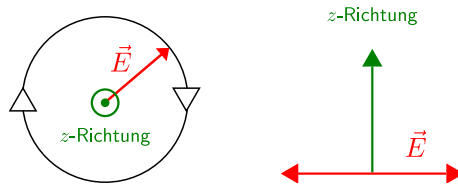


Abbildung 3: Eine zirkular polarisierte elektromagnetische Welle, die sich in z-Richtung ausbreitet, bei Betrachtung parallel (links) und senkrecht (rechts) zur Ausbreitungsrichtung. Senkrecht zur z-Achse gesehen, scheint die Welle linear polarisiert.