

# FERIENKURS EXPERIMENTALPHYSIK 4 2009

## Übung 2 - Lösung

### Streuung am Coulomb-Feld

Streuexperimente mit  $\alpha$ -Teilchen an Gold zeigen das Ergebnis in Abbildung 1. Die theoretische Kurve wurde unter der Annahme berechnet, dass das Wechselwirkungspotenzial  $V(r)$  zwischen den einlaufenden Heliumkernen mit Ladung  $Z_{He} = 2$  und einem Targetteilchen mit Ladung  $Z_{Au} = 79$  und der Stoßparameter  $b(\theta)$  gegeben sind durch

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_{He}Z_{Au}e^2}{r} = \frac{k}{r}$$

$$b(\theta) = \frac{k}{2E} \cot \frac{\theta}{2}$$

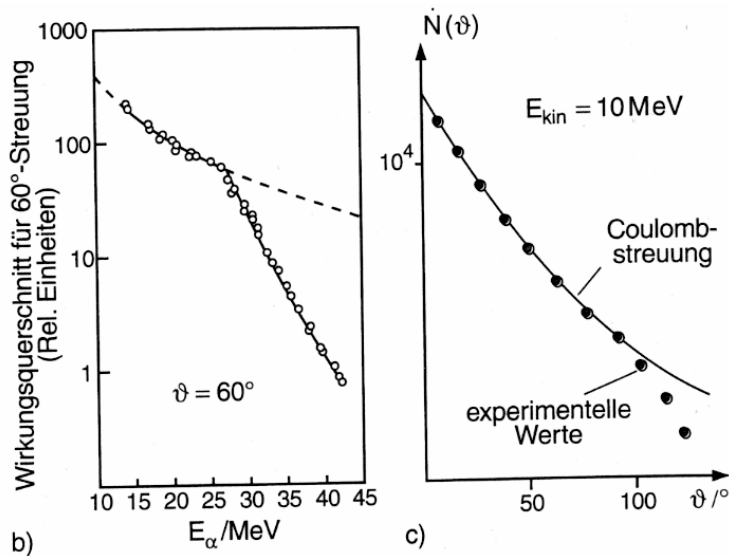


Abbildung 1: Abweichung vom Wirkungsquerschnitt bei konstantem Streuwinkel (links) und konstanter Energie (rechts). Bild aus dem Demtröder Experimentalphysik 3.

- a) Interpretieren Sie die Messergebnisse.
- b) Warum sollten bei Streuexperimenten möglichst dünne Targetdicken bzw. Targetmaterialien mit geringem Wirkungsquerschnitt verwendet werden?

c) Berechnen Sie mit der Rutherford-Streuformel

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0 E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \theta/2}$$

die Zählraten für das oben beschriebene Experiment, wobei die  $\alpha$ -Teilchen mit  $E = 15$  MeV und einem Fluss von  $\dot{N}_A = 2.5 \cdot 10^5$  1/s auf eine  $0.2 \mu\text{m}$  dicke Goldfolie (Molvolumen:  $10.19 \text{ cm}^3$ ,  $Z_{Au} = 79$ ) treffen. Unter den Winkeln  $\theta = 5^\circ, 10^\circ, 25^\circ$  werden die getreuten Teilchen mit  $2 \times 2 \text{ cm}^2$  großen Detektoren in 1 Meter Abstand vom Streuzentrum gemessen.

**Lösung:**

a) Es ist bei konstantem Winkel ab einer bestimmten Teilchenenergie eine deutliche Abweichung von der Theorie zu sehen und bei konstanter Energie ab einem bestimmten Streuwinkel. Betrachtet man den Stoßparameters, also den Abstand zwischen einlaufendem Teilchen und Streuzentrum, erkennt man, dass dieser bei konstanter Energie mit zunehmendem Streuwinkel abnimmt. Gleiches gilt bei zunehmende Energie mit konstantem Winkel. Das bedeutet, dass das einfallende Teilchen einem Atomkern immer näher kommt und dadurch überwiegen ab einem gewissen Abstand die kurzreichweitigen Kernkräfte die Coulombkraft, sodass die Wechselwirkung nicht mehr durch ein Coulombpotential beschrieben werden kann. Durch den minimalen Abstand  $b_{min}$  ab dem die Kernkräfte überwiegen, also das Experiment von der Theorie abweicht, kann man den Kernradius  $r_K$  des Streuatoms abschätzen mit  $r_K = b_{min} - r_{He}$ , wobei  $r_{He}$  der Radius des einfallenden Heliumkernes ist.

b)

- Vermeidung von Mehrfachstreuung
- Wirkungsquerschnitte dürfen sich nicht Überlagern

c) Die Luminosität berechnet sich zu:

$$L = \frac{\dot{N}_A}{F} n_B F = \dot{N}_A \frac{N_A}{V_{mol}} dx = 2.95 \cdot 10^{27} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0 E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \theta/2} = 1.44 \cdot 10^{-29} \text{ m}^2 \cdot \frac{1}{\sin^4 \theta/2}$$

Mit  $d\dot{N}_A = L \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$  und dem Raumwinkel  $d\Omega = A_D/r^2 = 4 \cdot 10^{-4}$  ergeben sich folgende Zählraten:

$$\begin{aligned} d\dot{N}_{5^\circ} &= 4.7 \text{ s}^{-1} \\ d\dot{N}_{10^\circ} &= 0.29 \text{ s}^{-1} \\ d\dot{N}_{25^\circ} &= 0.0077 \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

## Rutherfordstreuung

Eine 0.4  $\mu\text{m}$  dicke Goldfolie wird mit  $\alpha$ -Teilchen beschossen. Die kinetische Energie der Teilchen beträgt 4.8 MeV, die elektrische Stromstärke des Strahls 10 pA. Der Detektor mit einer kreisförmigen Öffnung von 4 cm Durchmesser befindet sich in 2 m Abstand.

- a) Berechnen Sie die Anzahl der Teilchen, die in jeder Sekunde um mehr als  $90^\circ$  abgelenkt werden. (Hinweis:  $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$ ).
- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein einfallendes Teilchen um mehr als  $90^\circ$  abgelenkt wird?

### Lösung:

a)

$$\begin{aligned}d\Omega &= 3.14 \cdot 10^{-4} \\L &= 7.36 \cdot 10^{32} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1} \\ \frac{d\sigma}{d\Omega} &= 1.41 \cdot 10^{-28} \text{ m}^2 \frac{1}{\sin^4 \theta/2}\end{aligned}$$

Integration über die hintere Halbsphäre:

$$\begin{aligned}\dot{N}_A &= L \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta 2\pi \sin \theta \frac{d\sigma}{d\Omega} = \\ &= 0.625 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1} \cdot \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \frac{\sin \theta}{\sin^4 \theta/2} = \\ &= \text{Hinweis und Substitutionsregel} = \\ &= 0.625 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1} \cdot 2 \left[ -\sin^{-2} \theta/2 \right]_{\pi/2}^{\pi} = \\ &= 1.304 \text{ MHz}\end{aligned}$$

b) Der einfallende Teilchenstrom ist

$$J_N = \frac{J}{2e} = \frac{10 \cdot 10^{-9} \text{ A}}{2e} = 31.21 \text{ GHz} \quad (1)$$

und die Wahrscheinlichkeit ist dann

$$w = \frac{\dot{N}_A}{J_N} = \frac{1.304 \text{ MHz}}{31.21 \text{ GHz}} = 0.0042\% \quad (2)$$

## Bohrsches Atommodell in der Festkörperphysik

Im Festkörper spalten die diskreten Energieniveaus der Elektronen in den Atomen in

quasikontinuierliche Zustände, die sogenannten Bänder auf. Diese Bänder sind energetisch durch Bandlücken getrennt. Das niedrigste vollbesetzte Energieband bezeichnet man als Valenzband, das nächsthöhere und somit teilweise besetzte oder leere Band als Leitungsband. Elektrischer Transport kann ausschließlich in nicht vollbesetzten Bändern stattfinden. Die Lage der besetzten Zustände und die Größe der Bandlücke bestimmen das elektrische Verhalten der Festkörper, siehe Abb. 2

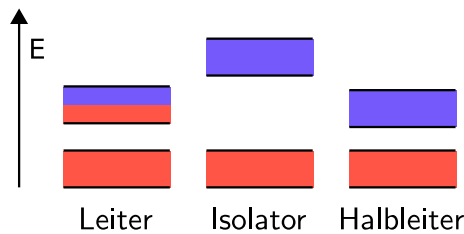


Abbildung 2: Leiter, Isolator und Halbleiter im Bändermodell. Besetzte Zustände sind in rot dargestellt, unbesetzte in blau

Halbleiter sind Festkörper mit einem unbesetzten Leitungsband, die aber eine niedrige Bandlücke im Bereich von einigen zehntel eV bis zu 2 eV aufweisen, so dass zum Beispiel durch thermische Anregung Elektronen in das Leitungsband gelangen können. Viel wichtiger ist allerdings die Tatsache, dass die Leitfähigkeit eines Halbleiters durch Einbringen einer geringen Menge von geeigneten Fremdatomen über viele Größenordnungen verändert werden kann. Dies bezeichnet man als Dotierung.

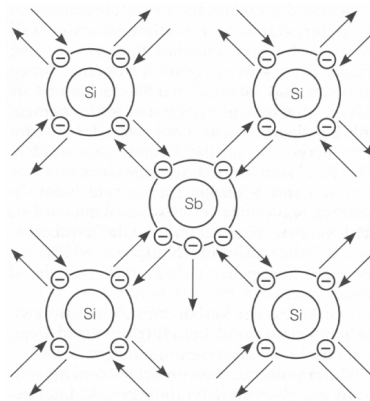


Abbildung 3: Durch Dotierung von Silizium (vier Valenzelektronen) mit Antimon (5 Valenzelektronen) wird ein Überschusselektron erzeugt.

Abb. 3 zeigt schematisch die atomaren Bindungsverhältnisse von Antimon-dotiertem Silizium: Vier der fünf Valenzelektronen des Antimonatoms gehen kovalente Bindungen mit den vier Valenzelektronen von Silizium ein, während das fünfte Valenzelektron quasi freibeweglich ist und somit zur Leitfähigkeit beiträgt.

Wir wollen nun das Bohrsche Atommodell verwenden, um das Donatoratom zu beschreiben. Wir nehmen dabei an, dass sich das Elektron im Feld eines Kerns mit der Ladung  $+e$  bewegt (der Großteil der Kernladung wird durch die inneren Elektronenschalen abgeschirmt). Die Abschirmung der Kernladung durch die umliegenden Siliziumatome können wir durch Verwendung der makroskopischen Dielektrizitätskonstanten  $\epsilon$  von Silizium berücksichtigen.

a) Berechnen Sie die Bindungsenergie des Donatorelektrons im Grundzustand unter Verwendung des Bohrschen Atommodells. Beachten Sie außerdem, dass Sie im Festkörper die Elektronenmasse durch die sogenannte effektive Masse  $m^*$  ersetzen müssen. Für Silizium gilt  $m^* = 0.2 \cdot m$  und  $\epsilon = 11.7$ . Wie können Sie mit diesem Ergebnis genauer begründen, dass durch Dotieren die Leitfähigkeit des Halbleiters erhöht wird? (Hinweis: Bei Raumtemperatur gilt  $k_B T = 25$  meV)

Wir können die Resultate für das Wasserstoffatom übernehmen, wenn wir  $m$  durch  $m^*$  und  $\epsilon_0$  durch  $\epsilon \cdot \epsilon_0$  ersetzen.

$$\begin{aligned} E &= \frac{me^4}{8h^2\epsilon_r^2\epsilon_0^2} = \\ &= 13.6 \text{ eV} \frac{m^*}{m} \frac{1}{\epsilon_r^2} \end{aligned}$$

Die Bindungsenergie im Grundzustand beträgt dann

$$E = 20 \text{ meV}$$

Da die typische thermische Energie bei Raumtemperatur  $k_B T = 25$  meV beträgt, können wir erwarten, dass die meisten der Donatorzustände ionisiert sind. Die Elektronen sind somit nicht mehr gebunden, sondern liegen als freie Leitungselektronen vor. Für die Leitfähigkeit eines Halbleiters gilt  $\sigma \propto n$ , wobei  $n$  die Dichte der Leitungselektronen ist.

b) Berechnen Sie außerdem den Radius der ersten Bohrschen Bahn. Wie lässt sich mit diesem Ergebnis die Annahme rechtfertigen, dass wir die Abschirmung des Coulombpotentials durch die makroskopische Dielektrizitätszahl des Materials berücksichtigen können?

Für die Berechnung des Bohrschen Radius gilt dasselbe wie oben:  $m \rightarrow m^*$  und  $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon \cdot \epsilon_0$

$$\begin{aligned} r &= \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0\hbar^2}{m^*e^2} = a_0 \cdot \frac{\epsilon \cdot m}{m^*} = \\ &= 0.53 \text{ \AA} \cdot 11.7 \cdot 0.2^{-1} \approx 30 \text{ \AA} \end{aligned}$$

Die Gitterkonstante  $a$  und damit der typische Atomabstand beträgt für Silizium  $5.43 \text{ \AA}$ . Die Bahnradien sind somit groß gegenüber den interatomaren Abständen. Im Mittel befindet deswegen eine große Anzahl von Atomen innerhalb des Bahnradius, so dass wir zu einer Kontinuumsbeschreibung übergehen und die makroskopische Dielektrizitätszahl verwenden können.

## Bohrsches Atommodell - Korrespondenzprinzip

Berechnen Sie im Bohrschen Atommodell die Frequenz der Strahlung die beim Übergang zwischen Niveaus der Hauptquantenzahl  $n$  und  $n - 1$  emittiert wird, und zeigen Sie, dass dies im Grenzfall großer Quantenzahlen  $n \rightarrow \infty$  gerade der Umlauffrequenz des Elektrons entspricht.

$$\begin{aligned}\nu &= \frac{\Delta E}{h} = \\ &= \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^3} \left( \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} \right) = \\ &= \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^3} \left( \frac{2n-1}{n^4 - 2n^3 - n^2} \right)\end{aligned}$$

für sehr große  $n$  sind im Zähler und im Nenner die höchsten Potenzen in  $n$  dominierend

$$\left( \frac{2n-1}{n^4 - 2n^3 - n^2} \right) \rightarrow \frac{2n}{n^4} = \frac{2}{n^3}$$

Damit ergibt sich

$$\nu = \frac{me^4}{4\epsilon_0^2 h^3} \cdot \frac{1}{n^3}$$

Für die klassische Umlauffrequenz gilt

$$\begin{aligned}\nu_{\text{Bahn}} &= \frac{v}{2\pi r} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{e^2 m}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2} = \\ &= \frac{me^4}{4\epsilon_0^2 h^4} \cdot \frac{1}{n^3}\end{aligned}$$

Im Grenzfall großer Quantenzahlen stimmt also das atomare Verhalten mit dem der klassischen Elektrodynamik überein.

## Aufenthaltswahrscheinlichkeiten im Wasserstoffatom

Im Grundzustand lautet die Wellenfunktion des Elektrons im Wasserstoffatom

$$\psi(r) = \frac{1}{a^{3/2} \sqrt{\pi}} \exp(-r/a)$$

mit dem Bohrschenradius  $a = 0.53 \text{ \AA}$

a) Bestimmen Sie den Radius  $r_m$  für den die radiale Aufenthaltswahrscheinlichkeit am größten ist.

Allgemein gilt:

Die Wahrscheinlichkeit  $W(\mathbf{r})d\mathbf{r}$  dafür, dass Elektron in einem Volumenelement  $d\mathbf{r}$  zu finden ist

$$W(\mathbf{r})d\mathbf{r} = |\psi|^2 d\mathbf{r}$$

Als radiale Aufenthaltswahrscheinlichkeit bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit  $W(r)dr$  das Elektron in einer Kugelschale zwischen  $r$  und  $r + dr$  zu finden. Allgemein gilt

$$W(r)dr = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} r^2 \sin \theta |\psi|^2 d\phi d\theta dr =$$

Es gilt  $\psi = Y_l^m(\theta, \phi) \cdot R(r)$ , wobei die Kugelflächenfunktionen folgende Normierung erfüllen

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \theta |Y_l^m|^2 d\phi d\theta = 1$$

Damit erhalten wir

$$W(r)dr = r^2 R(r)dr$$

Im vorliegenden Fall sehen wir aufgrund der Kugelsymmetrie sofort

$$\begin{aligned} W(r)dr &= 4\pi r^2 |\psi|^2 dr \\ W(r) &= \frac{4r^2}{a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) \\ \frac{dW}{dr} &= \frac{4}{a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) \left(2r - \frac{2}{a}\right) \\ &\rightarrow r_m = a \end{aligned}$$

b) Berechnen Sie außerdem den Erwartungswert des Abstands zwischen Elektron und Kern  $\langle r \rangle$  im Grundzustand und vergleichen Sie die Ergebnisse.

Für den Erwartungswert des Abstands gilt

$$\langle r \rangle = \int \psi r \psi^* d\mathbf{r}$$

Wegen der Kugelsymmetrie vereinfacht sich der Ausdruck wieder zu

$$\begin{aligned} \langle r \rangle &= \int_0^{\infty} 4\pi r^2 \cdot r |\psi|^2 dr \\ &= \int_0^{\infty} \frac{4r^3}{a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) dr \\ &= \frac{4}{a^3} \left| -\frac{1}{8} a \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) (3a^3 + 6ra^2 + 6r^2a + 4r^3) \right|_0^{\infty} \\ &= \frac{3}{2} a \end{aligned}$$

Für das Wasserstoffatom erhält man also die maximale radiale Aufenthaltswahrscheinlichkeit beim Bohrschen Radius  $a$ . Der Erwartungswert für den mittleren Abstand zwischen Elektron und Kern ist mit  $\frac{3}{2}a$  etwas größer als der Bohrsche Radius, obwohl diese Größe die quantenmechanische Entsprechung zum Bohrschen Radius ist.

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das Elektron innerhalb bzw. außerhalb des Bohrschenradius  $a$  zu finden?

$$\begin{aligned} \int_0^a W(r) dr &= \frac{4}{a^3} \int_0^a r^2 \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) dr = \\ &= \frac{4}{a^3} \left| -\frac{1}{4} a \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) (a^2 + 2ra + 2r^2) \right|_0^a \\ &= 1 - 5 \exp(-2) = 0.32 \end{aligned}$$

Wegen der Normierung  $\int_0^{\infty} W(r) dr = 1$  ist  $\int_a^{\infty} W(r) dr = 0.68$ .