Lösungen zu Quantenphänomene und Ursprünge der Quantentheorie

- Aufgabe 1: Schwarzer Strahler

Zuerst setzt man das gegebene ein:

$$\omega = \int P(\lambda, T)\, d\lambda = \int \frac{8\pi hc\lambda^{-5}}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} d\lambda \,.$$

Substitution:

$$x = \frac{hc}{\lambda kT} \, und \, d\lambda = -\frac{hc}{kTx^2} dx$$

Somit folgt für das Integral:

$$\omega = \int \frac{8\pi hcx^5}{e^x - 1} \left(\frac{kT}{hc}\right)^5 \left(\frac{-hc}{kTx^2}\right) dx = \left(\frac{kT}{hc}\right)^4 8\pi hc \int \frac{x^3}{e^x - 1} dx \,.$$

$\rightarrow$von T^4 abhängig.

- Aufgabe 2: Roter Riese

a) Stefan-Boltzman-Gesetz muss verwendet werden!

$$R = \frac{P}{A} = \sigma T^4 = 4.59 \cdot 10^6 \, \frac{W}{m^2} \,.$$

Um diese Aufgabe rechnen zu können, muss man den Radius abschätzen. Diese Abschätzung gilz speziell für Rote Riesen! $R = 1\, AE$

$$P = R \cdot 4\pi r^2 = 1.30 \cdot 10^{30}\, W \,.$$

b) Wiensches Verschiebungsgesetz:

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T} = 967\, nm \,.$$

c) Vorsicht, hier wird ein Vorfaktor benötigt!

$$\nu_{max} = \frac{c}{\lambda_{max}} \cdot 0.568 = 1.7 \cdot 10^{14}\, Hz \,.$$

d)

$$r = \frac{R_{sichtbar}}{R_{gesamt}}$$

R_{gesamt} lässt sich mit dem Stefan-Boltzmann-Gesetz berechnen, $R_{sichtbar}$ muss wie in der ersten Aufgabe durch Integration des Planckschen Strahlungsgesetz gelöst werden. Die Substitution ist dieselbe. Den Nenner kann man vereinfachen zu $e^{\frac{hc}{\lambda kT}}$, denn $\frac{hc}{\lambda kT} \gg 1$.
Somit ergibt sich für das Integral:

$$\rightarrow R_{sichtbar} = 2\pi \frac{k^4 T^4}{h^3 c^2} \int \frac{x^3}{e^x} dx = 0.3339 \cdot 10^6 \, \frac{W}{m^2} \, .$$

Nun folgt für $r = 7.3\%$.
Die Stammfunktion zum obigen Integral wird in einer Klausur normalerweise gegeben sein und lautet wie folgt:

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^{n+1}} \left[(ax)^n - n\,(ax)^{n-1} + n\,(n-1)\,(ax)^{n-2} \; ... \; + (-1)^n \, n! \right]$$

e) Liegt das Maximum der Wellenlänge des Sternes im Infrarotbereich, dann liegen nur rote Wellenlängen im sichtbaren Bereich, daher erscheint uns der Stern dann rot.
Liegt das Maximum hingegen im UV-Bereich, so erscheint uns der Stern blau.
Liegt das Maximum im grünen, so liegen alle Wellenlängen im sichtbaren Bereich und uns erscheint der Stern weiß.

- Aufgabe 3: Photoeffek

a) Die Bedingung für ein Maximum erster Ordnung am Gitter ist:

$$\sin \alpha = \frac{\lambda}{b} \, ,$$

wobei $b = \frac{10^{-3}}{570} \, m = 1.754 \cdot 10^{-6} \, m$.
Die Quecksilberlinien liegen zwischen $404.7 \, nm \, und \, 579.1 \, nm$.
Hierfür erhalten wir für den Winkelbereich:

$$\alpha_{min} = 13.34^\circ \, und \, \alpha_{max} = 19.28^\circ \, .$$

b) Die in der Aufgabe genannte Grenzwellenlänge für die Kalium Kathode beträgt $551 \, nm$. Da dies die Mindestenergie für den Photoeffekt ist, tritt dieser nur bei Energien größer dieser, also kürzeren Wellenlängen auf. Diese sind :546.1, 491.6, 435.8, 407.8, 404.7 . (Werte in nm!)

c) Monochromatisches Licht hat eine definierte Energie$W = \frac{hc}{\lambda}$ W = hc . Die kinetische Energie der Elektronen nach dem Austritt ist um die Austrittsarbeit vermindert:

$$E_{kin} = W_{Photon} - W_A = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda_{Grenz}} .$$

Ein Gegenfeld wird aufgebaut, weil die Photoelektronen sich von der Kathode entfernen und an der gegenüberliegenden Elektrode ansammeln. Diese wird negativ geladen und es entsteht ein Gegenfeld. Dieses wird so stark, bis die kinetische Energie keines Elektrons ausreicht um das Gegenfeld zu überwinden.

$$\lambda = b \sin \alpha = 407.8\,nm .$$

$$\Rightarrow W_{kin} = 3.05\,eV - 2.25\,eV = 0.8\,eV .$$

Folglich baut sich eine Gegenspannung bis $0.8\,V$ auf.

d) Spannung stellt sich wieder ein, falls für gleicheWellenlänge 2. Maximum am Gitter beobachtet wird (da Maximum schwächer dauert die Aufladezeit allerdings länger)

$$b \sin \alpha_2 = 2 \cdot \lambda$$

$\rightarrow \alpha_2 = 27.7°$.

e) Die Richtungen der Photoelektronen sind in den ganzen Raum verteilt. Desto höher man eine Gleichspannung anlegt, desto mehr von diesen Elektroden werden "eingefangen". Dies erklärt den Anstieg des Stromes mit der Spannung. Der Strom nähert sich aber rasch einem Grenzwert an, da nicht mehr Elektronen "abgesaugt" werden können, als an der Photoschicht erzeugt werden.

f) Die absorbierte Leistung berechnet sich wie folgt:

$$P = 20\,\frac{W}{m^2} \cdot 0.5 \cdot 10^{-4}\,m^2 \cdot 0.01 = 10^{-4}\,W .$$

Mittels des Volumens $V = 0.5\,cm^2 \cdot 10\,mm$ lässt sich nun die Teilchenanzahl berechnen:

$$N = \frac{\rho V}{M_{Kalium}} = 6.6 \cdot 10^{15}$$

Weiter muss die an jedes Atom übertragende Energie berechnet werden. Diese ist gleich der Austrittsarbeit.

$$\frac{Pt}{N} = W_A$$

Hieraus folgt für die Zeit:$t = 24\,s$.

g) Der Photostrom und damit auch der Photoeffekt setzen sofort und ohne Verzögerung ein. Dies konnte erst von Einstein durch die Deutung des Lichts als Photonen erklärt werden.

h) Berechnen wir zuerst die Rate n der absorbierten Photonen:

$$n = \frac{P}{W_{Photon}} = \frac{P\lambda}{hc}$$

Hieraus lässt sich I berechnen:$\rightarrow I = n \cdot 10^{-4} \cdot e = 3.3\,nA$.
(Alle 10^4 absorbierten Photonen ergeben ein Photoelektron.)

- Aufgabe 4: Comptonstreuung

a) Mittels der Comptonwellenlänge kann die Frequenz berechnet werden.

$$\triangle\lambda = \lambda_C\,(1 - \cos\Theta) = \lambda_C\,(1 - \cos 90^\circ)$$

$\rightarrow f = \frac{c}{\lambda_C} = \frac{m_0}{h}\,Hz = 1.2 \cdot 10^{20}\,Hz$.

b)

$$E_\gamma = \frac{hc}{\lambda_C} - \frac{hc}{2\lambda_C} = \frac{c^2 m_0}{2} = \frac{1}{2} \cdot 511\,keV\,.$$

Da die Photonenenergie ungefähr E_0 entspricht, muss relativistisch gerechnet werden!

$$E = E_0 + E_{kin} = mc^2 + \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\,.$$

Hiermit ergibt sich für $\beta = \frac{\sqrt{5}}{3}$.
Somit lässt sich die Geschwindigkeit berechnen:$v \approx 2.2 \cdot 10^8\,\frac{m}{s}$.

c) doppelter Winkel $\delta = 90^\circ$
$\rightarrow$rechtwinkliges Dreieck

$$\tan\epsilon = \frac{\vec{p\gamma}}{\vec{p'}_\gamma} = \frac{\lambda}{2\lambda} = \frac{1}{2}$$

$\rightarrow \epsilon = 27^\circ$.

- Aufgabe 5: Newtonsche Ringe

  a) Der Wegunterschied ist wie folgt definiert:

$$\triangle s = 2nd + 2\frac{\lambda}{2}\,.$$

Hierbei findet zweimal eine Reflexion am dickeren Medium statt.
In der Mitte heller Fleck, da eine ganzzahlige Interferenz vorliegt, nämlich λ.

  b) Der Gangunterschied ist gegeben durch: $\triangle = k \cdot \lambda$

$$\rightarrow d = \frac{k\lambda}{2n}$$

$$r^2 + (R-d)^2 = R^2$$

Vereinfacht man letzteren Ausdruck und vernächlässigt den d-Term, der vernachlässigbar klein ist, so erhält man für r:

$$r = \sqrt{2Rd} = \sqrt{k\frac{R\lambda}{n}}\,,$$

mit $r \leq \frac{D}{2}$. Unter Zuhilfenahme dieser Beziehungen, kann die Anzahl der Ringe berechnet werden:

$$k \leq \frac{nD^2}{4R\lambda} = 281\,.$$

Das heißt man hat 280 Ringe und einen zentralen Fleck.