Lösungen zu Interferenz und Beugung

- Aufgabe 1: Interferenzmaxima

a) Für die Intensitätsmaxima bei der Beugung an einem Gitter gilt:

$$d \sin \Theta = m\lambda \,.$$

Da es sich um kleine Winkel handelt, kann die Kleinwinkelnäherung verwendet werden. D.h. der Sinus kann vernachlässigt werden und man erhält:

$$d\Theta = m\lambda \,.$$

Bevor man sich nun den Winkel ausrechnen kann, muss noch die Größe d bestimmt werden:

$$d = \frac{10^{-2}\, m}{4000} = 2.5 \cdot 10^{-6}\, m \,.$$

Die beiden ersten Maxima auf einer Seite des zentralen Maximums treten bei den Winkeln $\Theta = 0.236\, rad\, und\, \Theta = 0.471\, rad$ auf. Dies kann aus obiger Formel berechnet werden.
Daraus kann der Abstand wie folgt berechnet werden:

$$y = \Theta l \,,$$

wobei wiederum die Kleinwinkelnäherung verwendet wurde.
Hierbei ergeben sich für die beiden Winkel folgende Werte:

$$l = 0.353\, m\, und\, l = 0.707\, m \,.$$

b) Bei einer Anordnung mit mehreren Spalten tritt das erste Minimum bei

$$\Theta = \frac{\lambda}{Nd}$$

auf. Darin ist N die Anzahl der Spalte. In unserem Fall ist $N = 8000$. Somit erhält man einen Winkel von $\Theta = 2.95 \cdot 10^{-5}\, rad$. Daraus kann nun die Breite des zentralen Maximums berechnet werden:

$$y = 2\Theta l = 88.4\, \mu m \,.$$

c) Das Auflösungvermögen ist $A = mN$, also gleich N bei der ersten Ordnung. Für dieses Gitter ist demnach $A = 8000$.

- Aufgabe 2: Kameralinse

a) Die Bedingung für destruktive Interferenz, durch die eine reflektierte Welle ausgelöscht wird, lautet hier

$$\frac{2nd}{\lambda} = m + \frac{1}{2}\,.$$

Für erste Ordnung, d.h. $m = 0$ muss die Dicke der Beschichtung $d = \frac{\lambda}{4n} = 97.8\,nm$ sein.

b) Für die destruktive Interferenz bei der nächsthöheren Ordnung gilt $\lambda = \frac{2nd}{\frac{3}{2}} = 180\,nm$ .Das liegt weit außerhalb des sichtbaren Bereichs. Somit tritt destruktive Interferenz für sichtbares Licht nur bei $\lambda = 540\,nm$ auf.

c) Für andere Wellenlängen als $\lambda = 540\,nm$ tritt teilweise destruktive Interferenz auf, für die gilt:

$$I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right)\,.$$

Darin ist δ die Phasendifferenz zwischen den Wellen. Es ist $\delta = 360^\circ \cdot \left(\frac{2nd}{\lambda}\right)$, weil $\frac{2nd}{\lambda}$ der Anteil der Strahlung ist, der die Beschichtung durchquert und zurückkehrt. Wir setzen $I_{max} = 4I_0$ gleich der Intensität, die hier höchstens reflektiert werden kann, und erhalten für die verschiedenen Wellenlängen:$I_{400} = 0.273\,I_{max}$ und$I_{700} = 0.124\,I_{max}$.

- Aufgabe 3: Öltropfen

In dieser Anordnung tritt an beiden reflektierenden Oberflächen eine Phasenänderung um 180° auf. Daher gilt für die Reflexionsmaxima $d = \frac{m\lambda}{2n}$, wobei $n = 1.22$ die Brechzahl des Öls ist. Für den zweiten roten Streifen setzten wir $m = 2$ sowie$\lambda = 650\,nm$ und erhalten $d = 533\,nm$.

- Aufgabe 4: Doppelspalt

a) Weil der Abstand der Spalte voneinander 5mal so groß ist wie die Spaltbreite, fälllt das erste Beugungsminimum mit dem fünften Interferenzmaximum zusammen. Daher befinden sich 4 helle Streifen auf jeder Seite des zentralen Maximums, also sind insgesamt 9 helle Streifen vorhanden. (Das zentrale Maximum wird als heller Streifen mitgezählt!)

b) Das Intensitätsverhältnis ist

$$\frac{I}{I_0} = \left[\frac{sin\frac{1}{2}\phi}{\frac{1}{2}\phi}\right]^2 .$$

Darin ist ϕ die Phasendifferenz der Wellen der Ober- und der Unterkante des Spaltes. Beim ersten Beugungsminimum, das beim selben Winkel liegt wie das fünfte Interferenzmaximum, ist $\phi = 360^\circ$. Daher ist die Phasendifferenz zum dritten Interferenzmaximum $\phi = \frac{3}{5} \cdot 360^\circ = 216^\circ = 3.77\, rad$. Daraus folgt: $\frac{I}{I_0} = 0.255$.

- Aufgabe 5: Newtonsche Ringe

a) Hier tritt eine Phasenänderung nur bei einer Reflexion auf, aber nicht bei der anderen. Daher gilt für konstruktive Interferenz $\frac{2d}{\lambda'} = m + \frac{1}{2}$. Die dünne Schicht besteht aus Luft; also ist $\lambda' = \frac{\lambda}{n} = \lambda$ und $d = \left(m + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\lambda}{2}$.

b) Der Radius r eines hellen Ringes ist gegeben durch $r^2 = R^2 - (R-d)^2 = 2dR - d^2 = 2dR\left(1 - \frac{d}{2R}\right)$.
Mit $\frac{d}{R} \ll 1$ folgt für den Radius eines Ringes $r = \sqrt{2dR} = \sqrt{\left(m + \frac{1}{2}\right) \cdot \lambda R}$.

c) Das transmittierte Muster wird erzeugt durch Interferenz eiiner direkt durchgehenden Welle mit einer Welle, die im Luftspalt zweimal reflektiert wird. Die beiden Reflexionen ergeben insgesamt die Phasendifferenz 0°.Damit entspricht die Bedingung für konstruktive Interferenz bei der Reflexion der Bedingung für destruktive Interferenz bei Transmission. Dadurch ist das transmittierte Muster invertiert. Da die Interferenz nach einer doppelten Reflexion erfolgt, werden die Interferenzstreifen schwachh erscheinen.

d) Auflösung nach der Ordnung ergibt

$$m = \frac{r^2}{\lambda R} - \frac{1}{2} = 67.3 .$$

Also liegen 68 helle Streifen vor, da der erste Streifen der Ordnung $m = 0$ entspricht.

e) Für den sechsten hellen Streifen ist $m = 5$ und daher $2r = 2\sqrt{\left(m + \frac{1}{2}\right) \cdot \lambda R} = 1.14\, cm$.

f) Weil die Brechzahl von Wasser kleiner ist als die von Glas, ist in der

Bedingung für konstruktive Interferenz nur λ durch $\lambda^{'} = \frac{\lambda}{n}$ zu ersetzen. Mit den Ergebnissen aus e) ist klar, dass der Durchmesser jedes Ringes kleiner ist, wenn Wasser statt Luft vorhanden ist; somit rücken die Ringe enger zusammen.

- Aufgabe 6: Michelson-Interferometer

a) Es werden nicht 10 Maxima gleichzeitig betrachtet, nachdem man den Spiegel verschoben hat. Es werden während des Verschiebens des Spiegels Interferenzmaxima auftreten. Wir betrachten hier einen divergenzfreien Strahl in dem eben abwechselnd Minima und Maxima erscheinen, während man die Weglängendifferenz der Lichtstrahlen ändert.
Die zusätzliche Weglänge, die der Strahl nach der Verschiebung durchlaufen hat, ist: $s = 2d = 10\lambda$.
Damit ergibt sich eine Wellenlange $\lambda = 450\,nm$.

b) Nun wird der Spiegel nicht mehr verschoben. Anfangs ist eine evakuierte Zelle im Strahlweg, die einen optischen Weg von $2Ln_{Vac} = 2L$ darstellt. Nun füllt man die Zelle mit CO_2 , somit ändert sich auch der Brechungsindex in der Zelle und der optische Weg. Nach der Aufgabenstellung werden 200 Maxima durchlaufen, weswegen der zusätzliche Wegunterschied folgender ist:$s = 2L\left(n_{CO_2} - 1\right) = 200\lambda$.
Hieraus lässt sich nun leicht der Brechungsindex bestimmten $n_{CO_2} = 1.00045$.

c) Der Spiegel wird wieder erneut verschoben. Zu Beginn wird der Speigel so verschoben, das wir konstruktive Interferenz erreichen. Nun verschieben wir den Spiegel um d und erhalten erst wieder ein Maximum, wenn sowohl die Wellenlängeλ , als auch $\lambda^{'}$ wieder ein Maximum am Schirm haben. Mit $\lambda > \lambda^{'}$ gilt:

$$s = 2d = N\lambda = (N+1)\cdot\lambda^{'}$$

Hieraus kann man nun $\lambda\, und\, \lambda^{'}$ ableiten und somit $\triangle\lambda$ berechnen:

$$\triangle\lambda = \lambda - \lambda^{'} = \frac{2d}{N} - \frac{2d}{N+1} = 1.122\,nm\,.$$

- Aufgabe 7: Abstandsbestimmung
Betrachte man hierzu die Weglängendifferenz $\triangle s = s_2 - s_1$:

$$s_1 = b\sin 45^\circ + \frac{\lambda}{2} = 2d\tan\Theta\sin 45^\circ + \frac{\lambda}{2} = 2d\tan\Theta\cdot n\sin\Theta + \frac{\lambda}{2}$$

und

$$s_2 = \frac{2d}{\cos\Theta}\cot n$$

Hieraus lässt sich die Weglängendifferenz folgendermaßen schreiben:

$$\triangle s = 2nd\cos\Theta - \frac{\lambda}{2}\,,$$

wobei $\cos\Theta = \sqrt{1 - \frac{\sin 45^\circ}{n^2}} = 0.84696\,.$

$$\triangle s = s_1 - s_2 = \frac{2nd}{\cos\Theta}\left(1 - \sin^2\Theta\right) - \frac{\lambda}{2} = 2nd\cos\Theta - \frac{\lambda}{2} = (2m+1)\,\frac{\lambda}{2}$$

mit $k = 0$ erhält man:$2nd\cos\Theta = \frac{\lambda}{2}\,.$
Daraus lässt sich nun sehr einfach die Dicke berechnen:

$$d = \frac{\lambda}{4n\cos\Theta} = 0.133\,\mu m\,.$$

- Aufgabe 8: Kalkspatplättchen
  Hierzu müssen wir den elektrischen Feldvektor in seine Komponenten parallel, ao, und senkrecht, o, zur optischen Achse zerlegen:

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\left(e_x + e_y\right)e^{i\omega t}$$

Die Phasenverschiebung ist hierbei:

$$\phi_{ao} = \frac{2\pi}{\lambda}dn_{ao}\,und\,\phi_o = \frac{2\pi}{\lambda}dn_o$$

$$\rightarrow \triangle\phi = \frac{2\pi}{\lambda}d\left(n_o - n_{ao}\right)$$

Nach dem Durchgang ergibt sich somit:

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{2}}e^{i\omega t}\left(e_x e^{i\phi_0} + e_y e^{i\phi_{ao}}\right)$$

Somit erhält man nach dem Polarisator:

$$E = e_{pol}\frac{E_0}{\sqrt{2}}e^{i\omega t}\left(e^{i\phi_0}\sin\Theta + e^{i\phi_{ao}}\cos\Theta\right)$$

Um die Intensität zu bekommen, muss das Betragsquadrat der Feldstärke genommen werden:

$$I = \frac{E_0^2}{2}\left(e^{i\phi_0}\sin\Theta + e^{i\phi_{ao}}\cos\Theta\right)\left(e^{-i\phi_0}\sin\Theta + e^{-i\phi_{ao}}\cos\Theta\right) = \frac{I_0}{2}\left(1 + 2\sin 2\Theta\cos\triangle\phi\right) .$$

Mit $\triangle\phi = 4.5\pi$ ergibt sich:$I = \frac{I_0}{2}$.
Die Intensität ist unabhängig von Θ , zirkularpolarisiert und ein $\frac{\lambda}{4} -$ Plättchen.

- Aufgabe 9: Radar

Ein Flugzeug wird vom Radar wahrgenommen, wenn dieses die Radionwellen reflektiert und und die Antenne das "Echo" auffängt. Dies kann verhindert werden, wenn die beiden Wellen gerade weginterferieren. Es gibt eine direkte Welle; diese läuft vom Flugzeug dirket zur Antenne. Die zweite Welle gelalngt erst nach Reflexion an der Wasseroberfläche zur Antenne. An der Wasseroberfläche erfährt diese einen Phasensprung von $\frac{\lambda}{2}$. Damit sich die beiden Wellen weginterferieren, muss also beim Auftreffen aufs Flugzeug gerade ein Wegunterschied $-\triangle s = s_1 - s_2$ von λ vorliegen. Aus der Zeichnung kann entnommen werden:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{h}{H}\, und\, x_1 + x_2 = s$$

Somit folgt für die beiden x:

$$x_1 = \frac{sh}{H+h}\, und\, x_2 = s\left(1 - \frac{h}{H+h}\right) = \frac{sH}{H+h}$$

Nun kann der Wegunterschied berechnet werden:

$$\triangle s = \sqrt{(H-h)^2 + s^2} - \sqrt{h^2 + x_1^2} - \sqrt{H^2 + x_2^2} = -\lambda$$

Verwendet man nun die Beziehungen für die beiden x, so ergibt sich:

$$\triangle s = \sqrt{(H-h)^2 + s^2} - \sqrt{h^2 + \left(\frac{sh}{H+h}\right)^2} - \sqrt{H^2 + \left(\frac{sH^2}{H+h}\right)^2} = -\lambda$$

Unter Ausnutzung, dass $s \gg h, H$ und der Entwicklung von $\sqrt{1+x} =$

$1 + \frac{1}{2}x$ ... folgt:

$$s\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{H-h}{s}\right)^2\right]-\frac{sh}{H+h}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{H+h}{s}\right)^2\right]-\frac{sH}{H+h}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{H+h}{s}\right)^2\right]=-\lambda$$

Vereinfacht man diesen Ausdruck, so ergibt sich:

$$\frac{(H-h)^2}{2s}-\frac{(H+h)^2}{2s}=-\lambda$$

Die Minimalhöhe, bei der erstmal destrukktive Interferenz auftritt und somit zur Unterdrückung des "Echos" führt, berechnet sich dann wie folgt:

$$H = s\frac{\lambda}{2h} = 50\,m\,.$$

- Aufgabe 10: Dreifachspalt

a) Um die resultierende Feldstärke zu berechnen, müssen die Feldstärken der einzelnen Spalte addiert werden:

$$E\left(\Theta\right) = E_1 + E_2 + E_3 = A + Ae^{i\delta} + Ae^{\frac{5i}{2}\delta}\,,$$

wobei die Phase gegeben ist durch $\delta = \frac{2\pi d}{\lambda}\sin\Theta$.
Die Intensität ist proportional zum Betragsquadrat der Feldstärke:

$$I\left(\Theta\right) \propto A^2\left[3+2\left(\cos\delta+\cos\left(\frac{3}{2}\delta\right)+\cos\left(\frac{5}{2}\delta\right)\right)\right]$$

Setzt man nun $\Theta = 0\,,$ so erhält man $I\left(0\right) \propto 9A^2$.
Das erste Hauptmaximum ist gegeben bei $\delta = 4\pi$ und der dazugehörige Winkel durch $\sin\Theta = \frac{2\lambda}{d}$.

b) Hier ergibt sich:

$$I\left(\frac{\Theta_1}{2}\right) \propto A^2\left[3+2\left(\cos 2\pi+\cos 3\pi+\cos 5\pi\right)\right]$$

Vereinfacht man diesen Ausdruck noch, so erhält man:

$$A^2 \propto \frac{I_0}{9}\,.$$

- Aufgabe 11: Radioastronomie

  a) Unter Verwendung des Auflösungsvermögens von Fernrohren und dem Rayleigh-Kriterium lässt sich der Durchmesser von Sonnenflecken wie folgt berechnen:

$$\sin \phi \approx \phi = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

  Hieraus ergibt sich für $\phi = \frac{d}{l} = 3.33 \cdot 10^{-4}$.
  Nun kann der Durchmesser mittels umstellen leicht berechnet werden:

$$D = 1.22 \frac{\lambda}{\phi} = 7320\, m\,.$$

  b)Die Winkelauflösung berechnet sich über:

$$\triangle \phi_{min} = 1.22 \frac{\lambda}{D} = 1.34 \cdot 10^{-7}\, rad\,.$$