Ferienkurs Experimentalphysik III

Musterlösung Montag - Elektrodynamik und Polarisation

Monika Beil, Michael Schreier

27. Juli 2009

1 Prisma

Gegeben sei ein Prisma mit Öffnungswinkel γ. Zeigen Sie dass bei symmetrischem Strahlengang für den Ablenkwinkel δ gilt

$$\delta = 2\left(\arcsin\left(n \sin\frac{\gamma}{2}\right) - \frac{\gamma}{2}\right)$$

Lösung Aus der Konstruktion des Strahlengangs kann man relativ schnell sehen das

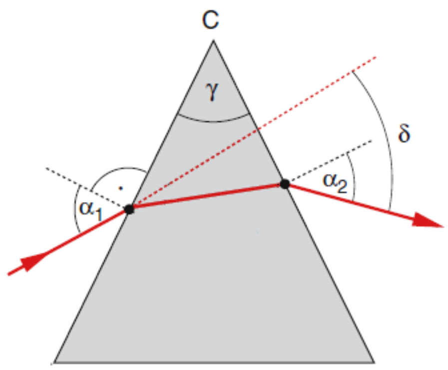


Abbildung 1: Allgemeiner Strahlengang durch ein Prisma

man δ erhält wenn man den eintreffenden Strahl an der Horizontalen spiegelt und den Zwischenwinkel bestimmt.
Da der Strahl innerhalb des Prismas horizontal verlaufen muss gilt für den Innenwinkel $\beta = \frac{\gamma}{2}$.
Für den Winkel α des eintreffenden Strahls relativ zu Oberfläche gilt gemäß Snellius

$$n \sin\beta = \sin\alpha$$

bzw. relativ zur Horizontalen $\alpha - \beta$. Somit ergibt sich δ zu

$$\delta = 2(\alpha - \beta) = 2\left(\arcsin\left(n \sin\frac{\gamma}{2}\right) - \frac{\gamma}{2}\right)$$

2 Polarisation

2.1 Doppelbrechung

Zwischen zwei parallel ausgerichteten Polarisationsfiltern befindet sich ein doppelbrechendes Plättchen, dessen optische Achse parallel zur Grenzfläche ist. Das Plättchen ist so angeordnet, dass die Apparatur für Licht einer bestimmten Wellenlänge undurchlässig ist. Wie muss die optische Achse des doppelbrechenden Plättchens zur Polarisationsrichtung ausgerichtet sein, welche Dicke des Plättchens ist nötig, und wie groß ist dann die Phasenverschiebung zwischen ordentlichem und außerordentlichem Strahl.

Lösung

Für die Dicke des Plättchens gilt

$$d = \frac{\lambda}{2(n_o - n_{ao})} = 1.45\mu m$$

Der Zwischenwinkel folgt aus

$$\Delta\alpha = 90^\circ = 2\theta \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

Der Phasenversatz ist dann

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d(n_o - n_{ao}) = \pi$$

2.2 Polarisationsfilter

Die Polarisationsachsen zweier Polarisationsfolien seien gekreuzt, so dass kein Licht durch dringt. Eine dritte Folie werde so zwischen die beiden gestellt, dass ihre Transmissionsachse mit der ersten einen Winkel $\theta = \omega \cdot t$ bildet. Unpolarisiertes Licht der Intensität I_0 treffe auf die erste Folie. Geben Sie eine allgemeine Formel an, die den Zusammenhang zwischen der Intensität I_0 und der Intensität I_3 nach dem dritten Polarisationsfilter beschreibt und zeigen Sie dass die Intensität mit 4ω moduliert ist. Was ist der zeitliche Mittelwert $\bar{I}_3$? (Hinweis: $\cos^2\alpha \sin^2\alpha = \frac{1}{8}(1 - \cos 4\alpha)$)

Lösung

Eine Aufteilung der Intensität in parallelen und senkrechten Anteil liefert gemäß Vorlesung

$$\begin{aligned}
\vec{E}_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(E_0\vec{e}_{\parallel} + E_0\vec{e}_{\perp}) \\
E_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}E_0 \\
E_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}E_0\cos(\omega t) \\
E_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}E_0\cos(\omega t)\cos(90^\circ - \omega t) = \frac{1}{\sqrt{2}}E_0\cos(\omega t)\sin(\omega t)
\end{aligned}$$

Für die Intensität gilt mit dem Hinweis

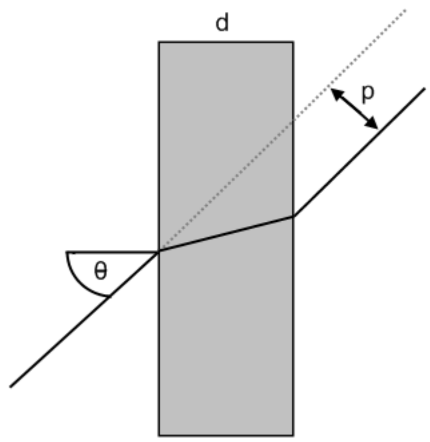
$$I_3 = \frac{E_0^2}{2}\cos^2(\omega t)\sin^2(\omega t) = \frac{E_0^2}{16}(1-\cos 4\omega t) = \frac{I_0}{16}(1-\cos 4\omega t)$$

Das zeitliche Mittel berechnet sich mit $T = \frac{2\pi}{4\omega}$

$$\bar{I}_3 = \frac{1}{T}\int_0^T I_3(t)dt = \frac{I_0}{16}\frac{4\omega}{2\pi}[t - \sin 4\omega t]_0^{\frac{2\pi}{4\omega}} = \frac{I_0}{16}$$

3 Glasplatte

Ein Lichtstrahl trifft unter dem Einfallswinkel θ auf eine planparallele Glasplatte der Dicke $d = 1cm$. Die Polarisationsrichtung des Lichts liegt parallel zur Einfallsebene. Der Strahl erleidet beim durchqueren der Platte einen Parallelversatz p



1. Der Brechungsindex des Glases für das eingestrahlte Licht sei $n = 1.6$. Der Einfallswinkel beträgt $\theta = 45°$. Berechnen Sie den Parallelversatz p, den das direkt transmittierte Licht gegenüber der Einfallsrichtung aufweist.
   Lösung
   Ein nicht abgelenkter Strahl hat Aufgrund seines Einfallswinkels eine Austrittshöhe $h = d = 1cm$ über der Eintrittshöhe. Für den gebrochenen Strahl gilt

   $$\sin\theta = n\sin\alpha$$
   $$h' = d\sin\alpha = \frac{d}{n}\sin\theta \approx 0.44cm$$

   Damit gilt für den Höhenunterschied x der beiden Strahlen $x = h - h' \approx 0.56cm$. Für den Parallelversatz gilt nun schließlich

   $$p = x\sin(\pi/2 - \theta) \approx 0.39cm$$

2. Berechnen Sie für $\theta = 45°$ den Anteil der eingestrahlten Lichtleistung, der in den linken Halbraum zurückreflektiert wird. Vernachlässigen Sie dabei alle Lichtwege, die mehr als eine Reflexion enthalten.
   Lösung
   Der Vorlesung entnehmen wir

$$R_{\shortparallel} = \left(\frac{\tan(\theta - \alpha)}{\tan(\theta + \alpha)}\right)^2$$
$$\theta = 45°, \ \alpha = 26,2°$$
$$R_{\shortparallel} = 0.013$$

   Es werden also 1.3% der eingestrahlten Lichtleistung reflektiert.

3. Für einen bestimmten Einfallswinkel verschwindet hier die Reflexion vollständig. Berechnen Sie diesen Winkel θ_{kR}
   Lösung
   Da wir nur parallel zur Einfallsebene polarisiertes Licht haben wir beim Brewsterwinkel die Intensität der Reflexion Null

$$\theta_{kR} = \theta_B = \arctan\left(\frac{n}{1}\right) = 58°$$

4. Anstelle von monochromatischem Licht wird nun weißes Licht verwendet. Für die Dispersion des Glasmaterials gilt $dn/d\lambda < 0$. Ist der Parallelversatz p für die rote oder blaue Lichtkomponente größer?
   Lösung
   Da $dn/d\lambda < 0$ wird kurzwelliges (blaues) Licht stärker gebrochen. Wenn wir uns die Formel aus Teilaufgabe 1 genauer betrachten erhalten wir

$$p = d\left(1 - \frac{\sin\theta}{n}\right)\cos(\theta)$$

   Für große n wird p also größer, folglich ist p für blaues Licht größer als für rotes Licht.

4 Taucher

Ein Taucher befinde sich in einer Tiefe von $10m$ unter dem Wasserspiegel und schaut nach oben. Wie groß ist die Meeresoberfläche, durch die hindurch er Objekte außerhalb des Wassers ($n_W = 1.333$) sehen kann?
Lösung
Der Sichtbereich des Tauchers wird durch die ab einem bestimmten Winkel auftretende Totalreflexion begrenzt. Der Grenzwinkel lautet

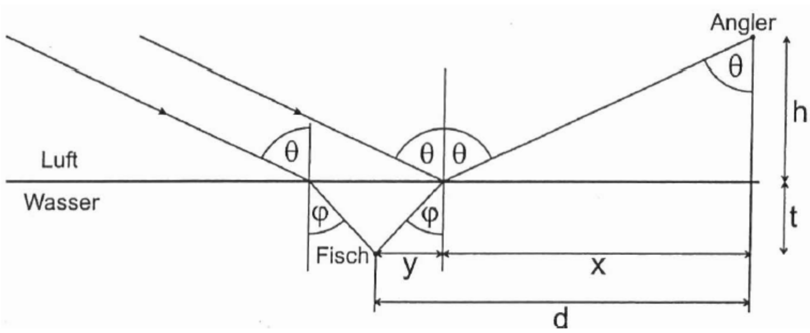
$$\alpha_T = \arcsin\left(\frac{1}{n_W}\right) = 48.6°$$

Für die Kreisfläche des durchsichtigen Bereichs gilt nun

$$r = 10m \cdot \tan \alpha_T = 11.34m$$
$$A = r^2 \pi = 404m^2$$

5 Angler

Ein Angler mit Augenhöhe $h = 2.0m$ über der Wasseroberfläche beobachtet einen Fisch der sich in der Tiefe $t = 1.0m$ unter Wasser $n_W = 1.33$ befindet. Die Sonne strahlt unpolarisiertes Licht unter dem Winkel θ zur Normalen der Wasseroberfläche ein. Sonne, Auge des Beobachters und Fisch liegen dabei alle in einer Ebene senkrecht zur Wasseroberfläche. Die Sonne sein punktförmig und unendlich weit entfernt. Betrachten Sie den Fisch ebenfalls als Punktförmig in seinem Auge lokalisiert.



1. Der Einfallswinkel des Sonnenlichts betrage zunächst $\theta = 65°$. Das Sonnenlicht wird teilweise von der als absolut eben angenommenen Wasseroberfläche reflektiert. In welcher Entfernung d muss sich der Fisch aufhalten, damit er vom Angler aus betrachtet genau durch den Sonnenreflex verdeckt wird?
   Lösung
   Mit dem Brechungsgesetz erhalten wir

   $$\sin\theta = n_W \sin\varphi \Rightarrow \varphi = 42.96°$$

   Mit den Beziehungen $\tan\theta = \frac{x}{h}$ und $\tan\varphi = \frac{y}{t}$ erhalten wir den Abstand

   $$d = x + y = h\tan\theta + t\tan\varphi = 5.22m$$

2. Der Einfallswinkel des Sonnenlichts sei nun der Brewsterwinkel θ_B für die äußere Reflexion. Berechnen Sie θ_B.
   Lösung
   Für den Brewsterwinkel gilt

   $$\theta_B = \arctan\frac{n_W}{1} = 43.1°$$

3. Der Angler kann zwischen zwei unterschiedlichen Polarisationsbrillen wählen. Eine Brille lässt nur Licht durch, das senkrecht zur Einfallsebene polarisiert ist, die andere nur Licht welches parallel zur Einfallsebene polarisiert ist. Welche Brille muss der Angler wählen um (unter Brewster-Geometrie) den Sonnenreflex auf der Wasseroberfläche bei der Fischbeobachtung vollständig zu unterdrücken?
   Lösung
   Da Licht das unter dem Brewsterwnkel reflektiert wird nur eine senkrecht zur Einfallsebene polarisierten Anteil enthält kann der Angler mit der Brille die nur den parallelen Anteil durchläst den Reflex vollständig unterdrücken.

6 Totalreflexion

Untersuchen Sie wie ein dünner Diäthylätherfilm ($n_D = 1.3529$) auf einer Plexiglasfläche ($n_P = 1.491$) den kritischen Wert der Totalreflexion beeinflusst. Beantworten Sie dazu folgende Fragen:

1. Betrachten Sie zunächst die Situation ohne Diäthylätherfilm. Wie groß ist der kritische Winkel der Totalreflexion θ_k für die Plexiglas-Luft Grenzfläche?
   Lösung
   Für den Übergang gilt gemäß Vorlesung
   $$\theta_k = \arcsin \frac{1}{n_P} = 42.1°$$

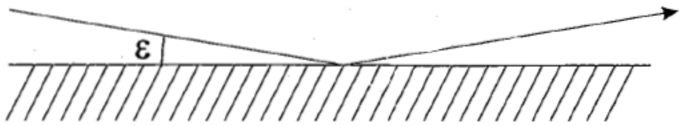
2. Nun befindet sich ein dünner Diäthylätherfilm direkt auf dem Plexiglas. Wie groß ist der kritische Winkel der Totalreflexion θ_k für die Plexiglas Diäthyläther Grenzfläche?
   Lösung
   Die Rechnung verläuft analog
   $$\theta_k = \arcsin \frac{n_D}{n_P} = 65.1°$$

3. Gibt es einen Bereich ($> 1°$) von Einallswinkeln, die größer sind als der in (1) bestimmte kritische Winkel für die Plexiglas-Luft Grenzfläche, unter denen Licht aus dem Glas in den Diäthylätherfilm und anschließend in die Luft austreten kann?
   Lösung
   Für uns ist also der Bereich größer als 42.1° (1) und kleiner als 65.1° (2) interessant. Zunächst berechnen wir den Grenzwinkel der Totalreflexion für die Grenzschicht Diäthyläther-Luft
   $$\theta_k = \arcsin \frac{1}{n_D} = 47.7°$$
   Über das Snelliussche Brechungsgesetz können wir nun auf den maximalen ($n_P > n_D$) Winkel unter dem ein Strahl das Plexiglas verlassen kann schließen.
   $$n_D \sin 47.7° = n_P \sin \alpha \Rightarrow \alpha = 42.1°$$

Da dieser mit dem in (1) berechneten übereinstimmt, gibt es keinen Bereich für den die Forderung erfüllt werden kann.

7 Neutronenoptik

Ähnlich wie bei Luft lässt sich auch für Neutronen ein effektiver Brechungsindex definieren mit dessen Hilfe die Wechselwirkung von Neutronen mit Materie analog zur Reflexion und Brechung von Licht beschrieben werden kann. Quarz hat für Neutronen der Wellenlänge $\lambda = 2nm$ den Brechungsindex $n = 1 - a\lambda^2$ $(< 1!)$ mit $a = 0.575 \cdot 10^{14} m^{-2}$. Der Brechungsindex von Neutronen in Luft wird mit 1 angenähert.
Ein Neutronenstrahl werde an einer ebenen Quarzoberfläche totalreflektiert.



Zeigen Sie dass der Grenzwinkel der Totalreflexion ϵ bei streifendem Einfall $(\epsilon \ll 1)$ in erster, nichttrivialer Näherung gegeben ist durch $\epsilon = \sqrt{2(1-n)}$ und berechnen Sie diesen. Neutronen welcher Wellenlänge werden bei festem Einfallswinkel totalreflektiert? Welche Form der Dispersion liegt hier vor?
Lösung
Für den Grenzwinkel α gilt

$$\alpha = \arcsin \frac{n}{1} \Leftrightarrow \sin \alpha = n$$

Da der gesuchet Winkel ϵ der Glanzwinkel ist gilt der Zusammenhang $\epsilon = \pi/2 - \alpha$ und somit

$$\cos \epsilon = n$$

Diesen Ausdruck entwickeln wir nun bis zum ersten nicht konstanten Term

$$1 - \frac{\epsilon^2}{2} = m \Rightarrow \epsilon = \sqrt{2(1-n)}$$

Eingesetzt ergibt sich $\epsilon = 0.02°$.
Für die Beziehung Wellenlänge $\leftrightarrow$ Winkel ergibt sich

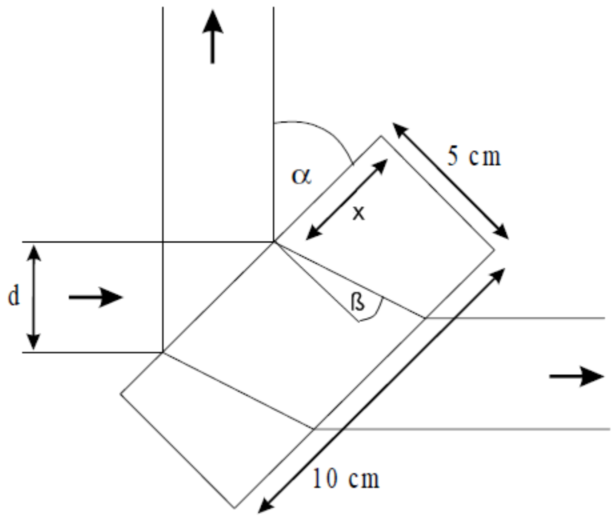
$$\epsilon = \sqrt{2(1 - 1 + a\lambda^2)} = \lambda\sqrt{2a} \Rightarrow \lambda = \frac{\epsilon}{\sqrt{2a}}$$

Die Form der Dispersion erhält man durch

$$\frac{dn}{d\lambda} = -2a\lambda < 0 \Rightarrow \text{mormale Dispersion}$$

8 Strahlteiler

Ein Glasklotz ($n = 1.5$) der Breite $b = 5cm$ und der Länge $l = 10cm$ soll etsprechend der Abbildung zum Aufteilen eines Lichtstrahls der Breite d benutzt werden. Welche Dicke d darf der Strahl maximal haben, wenn das Licht unter dem Winkel α zur Oberfläche auf den Glasklotz trifft? Welcher Wert ergibt sich für $\alpha = 45°$? Der Glasklotz darf dabei in die günstigst möglich Position gebracht werden.



Lösung
OBdA laufe nun das untere Ende des Strahls am unteren Ende des Klotzes ein. Damit das obere Ende nicht an der kurzen Seite den Klotz verlässt (der Strahl also abgeschnitten wird) gilt für den Abstand x

$$\tan\beta = \frac{x}{b} \Rightarrow x = b\tan\beta$$

Dabei gilt für β

$$\beta = \arcsin\frac{\cos\alpha}{n}$$

Für die Dicke d gilt nun mit $\sin\alpha = \frac{d}{l-x}$

$$d = \sin\alpha\left(l - b\tan\arcsin\left(\frac{\cos\alpha}{n}\right)\right)$$

Mit $\alpha = 45°$ erhalten wir $d \approx 7cm$

Bilder teilweise entnommen aus „Wolfgang Demtröder - Experimentalphysik 2 Elektrizität und Optik“