TU München, 19.08.2009

Musterlösung

Ferienkurs Experimentalphysik II:
Magnetostatik und zeitlich veränderliche Felder

Rolf Ripszam

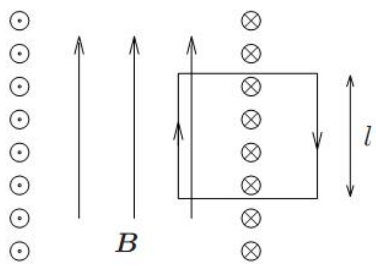
1 Hohlzylinder

Nach Ampere gilt $\oint_{\partial A} \vec{B} \cdot \vec{ds} = \mu_0 \cdot I$. Dabei entspricht I dem Strom, der durch die geschlossene Fläche fließt, über deren Rand integriert wird. Da der Zylinder symmetrisch zu seiner Mittelachse ist, integrieren wir über einen Kreisrand, so dass die linke Seite stets $\oint_{\partial A} \vec{B} \cdot \vec{ds} = 2\pi \cdot r \cdot B$ ist. Der eingeschlossene Strom ist im Hohlraum 0, außerhalb des Zylinders I und im Zwischenbereich $I(r) = \frac{r^2-a^2}{b^2-a^2} I$. Damit ist die Feldstärke

$$\vec{B}(r) = \begin{cases} 0 & r \leq a \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi(b^2-a^2)}(r - \frac{a^2}{r}) & a < r \leq b \\ I & b < r \end{cases}$$

2 Eisentorus

(a) Durch die vereinfachenden Annahmen kann man die Krümmung der Ringspule vernachlässigen und bei der Berechnung des Feldes so tun, als handle es sich um eine gerade zylinderförmige Spule. Dann kann man eine Amperesche Schleife so legen wie in der Skizze gezeigt:



Das Feld hat die Form

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} B\hat{e_z} & \text{innen} \\ 0 & \text{außen} \end{cases}$$

so dass das Amperesche Duchflutungsgesetz

$$\oint_{\partial A} \vec{dr} \cdot \vec{B} = \mu_0 \int_A \vec{dA} \cdot \vec{j}$$

ergibt:

$$Bl = \mu_0 nlI$$

wobei l die Länge der Schleife und n die Anzahl der Wicklungen pro Längeneinheit ist. Also

$$B = \mu_0 nI = 1,26 \cdot 10^{-6} kgm/C^2 \cdot 10000/m \cdot 0,001A = 1,26 \cdot 10^{-5} T1$$

Im materiefreien Raum ist der Zusammenhang zwischen H und B einfach

$$H = \frac{B}{\mu_0}$$

das H-Feld ist also

$$H = nI = 10A/m$$

(b) Wenn sich der Eisenkern in der Spule befindet, dann hat H immer noch denselben Wert wie zuvor, also

$$H = nI = 10A/m$$

Der Zusammenhang zwischen H und B im Eisen ist nun allerdings gegeben durch

$$H = \frac{B}{\mu_0} - M$$

mit der Magnetisierung M. Diese ist zunächst noch unbekannt, allerdings hat man den Zusammenhang zwischen M und H:

$$M = \chi_m H$$

mit der magnetischen Suszeptibilität χ_m des betrachteten Materials. Also

$$M = 1000 \cdot 10A/m = 10000A/m$$

und

$$B = \mu_0(H + M) = 0,0126T$$

Bemerkung: Mit der relativen Permeabilität $\mu = 1 + \chi_m$ gilt:

$$M = (\mu - 1)H = (\mu - 1)nI$$

und

$$B = \mu_0 \mu H = \mu_0 \mu n I = \mu B_0$$

mit dem Feld $B_0 = \mu_0 n I$ im materiefreien Raum.

3 Gebogener Leiter

Nach Biot-Savart gilt $\vec{B}(\vec{r_1}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \int_s \frac{\hat{e_{12}} \times d\vec{s_2}}{r_{12}^2}$. Da wir das Magnetfeld im Ursprung suchen, folgt direkt, dass die geraden Leiterstücke nichts zu diesem Feld beitragen können, da dort $\hat{e_{12}}||d\vec{s_2}$ ist und das Kreuzprodukt folglich verschwindet. Die Berechnung der Feldstärke, die durch den Halbkreis hervorgerufen wird, ist analog zu einer kreisförmigen Schleife; wir integrieren lediglich von 0 bis π statt von 0 bis 2π. Das Feld im Ursprung beträgt also

$$\vec{B}(0) = -\frac{\mu_0 I}{4R}\hat{e_z}$$

4 Kraft auf Leiter

Gemäß der Vorlesung ist $\vec{F} = I \cdot (\vec{L} \times \vec{B})$. Damit gilt für die Beträge $F = I \cdot L \cdot B \cdot \sin\alpha$. Der gesuchte Winkel beträgt also

$$\alpha = \arcsin(\frac{F}{BIL}) = 41,8^\circ$$

5 Magnetischer Kegel

Der halbe Öffnungswinkel sei $\phi \Rightarrow \tan\phi = r/l$, l sei die Seitenkante des Kegels. Für den Strom der sich ergibt, wenn ein geladener Drahtring mit Radius r und Winkelgeschwindigkeit ω rotiert folgt:

$$I = \rho A v = \lambda v = \lambda \omega r$$

Unseren Gesamtstrom setzen wir aus solchen kleinen Kreiströmen dI zusammen.

$$\lambda = \sigma dl; \omega r = \omega l \cdot \tan\phi$$

$$dI = \lambda v = \sigma\omega l \cdot \tan\phi \cdot dl$$

Das Dipolmoment für einen infinitesimal kleinen Ring ist:
mit Fläche $A = \pi r^2 = \pi l^2 \tan^2\phi$
$d\mu = A \cdot dI$ hieraus ergibt sich μ durch Integration über dμ

$$\mu = \int_0^{R/\tan\phi} d\mu = \pi\sigma\omega \tan^3\phi \int_0^{R/\tan\phi} l^3 dl = \frac{1}{4\tan\phi} R^4 \pi\sigma\omega$$

6 Fallende Leiterschleife

Maschenregel:

$$U = U_R - U_{ind} = RI(t) + Bdv(t)$$

Gesamtkraft:

$$mg + BdI(t) = m\dot{v}(t)$$

Zusammen:

$$\dot{v}(t) + \frac{B^2 d^2}{RM} v(t) = g$$

Lösung der Dgl:

$$v(t) = \frac{gRm}{B^2 d^2}\left(1 - exp\left[-\frac{B^2 d^2}{Rm} t\right]\right)$$

7 Standardaufgabe

Wir legen das Koordinatensystem so, dass sich die Anordnung in der xz-Ebene befindet, mit der Spule im negativen x-Bereich und dem Draht entlang der z-Achse. Nach Biot-Savart ist das zeitabhängige B-Feld des Drahtes (für langsam veränderliche Ströme)

$$\vec{B}(t,\vec{r}) = B(t,r)\hat{e_\varphi} \quad , \quad B(t,r) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r}$$

($r := \sqrt{x^2 + y^2}$)

Die induzierte Spannung U(t) ist nach dem Induktionsgesetz

$$U = \phi_B - \phi_A = -\int_{A\to B} d\vec{r} \cdot \vec{E} = +N\frac{d}{dt}\int d\vec{A} \cdot \vec{B}$$

Dabei ist das Linienintegral von A nach B entlang der Spule zu nehmen (also im Gegenuhrzeigersinn) und das Flächenintegral dann wie üblich so, dass das Flächenelement $d\vec{A}$ zusammen mit dem Richtungssinn der Linienintegration der „Rechten-Hand-Regel“ genügt. Also so, dass $d\vec{A} = -\hat{e_y} dxdz$ ist.
Also:

$$\begin{aligned}
U(t) &= N\frac{d}{dt}\int_{-2a}^{-a} dx \int_{-a/2}^{a/2} dz(-\hat{e_y}) \cdot \vec{B}(t,x,0,z) \\
&= N\frac{d}{dt}\int_{-2a}^{-a} dx \int_{-a/2}^{a/2} dz(-\hat{e_y}) \cdot \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi|x|}(-\hat{e_y}) \\
&= \frac{Na\mu_0 \dot{I}(t)}{2\pi}\int_{-2a}^{-a} \frac{dx}{|x|} \\
&= \frac{Na\mu_0 \dot{I}(t)}{2\pi}[-\ln|x|]_{-2a}^{-a} \\
&= \frac{Na\mu_0 \ln 2}{2\pi}\dot{I}(t)
\end{aligned}$$

Mit $I(t) = I_0 \cos\omega t$ folgt

$$U(t) = -\frac{Na\mu_0 \ln 2}{2\pi} I_0 \omega \sin\omega t$$

Einsetzen der Zahlenwerte ergibt:

$$U(t) = -0,0261V \cdot \sin(377s^{-1}t)$$

8 Selbstinduktion einer Spule

Magnetfeld einer Langen, geraden Spule:

$$B = \mu_0 \cdot \frac{N}{l} \cdot I$$

Daraus folgen der magnetische Fluss

$$\Phi = B \cdot A = \mu_0 \cdot \frac{N}{l} \cdot I \cdot A$$

und die Induktionsspannung

$$U_{Ind} = -N \cdot \frac{d\Phi}{dt} = -\mu_0 n^2 lA \cdot \frac{dI}{dt} = -L \cdot \frac{dI}{dt}$$

Also:

$$L = \mu_0 n^2 V$$

9 Schaltung mit Induktivität I

a) Kirchhoffsche Regeln ergeben folgende Differentialgleichung:

$$U_0 = I \cdot R - U_{ind} = I \cdot R - L\frac{dI}{dt}$$

Lösungsansatz

$$I(t) = A \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + I_0$$

mit der Anfangsbedingung $I(0) = 0$ ergibt:

$$I(t) = \frac{U_0}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

b) 63% bedeutet, dass der Strom auf $\frac{1}{e}$ abgefallen ist. Also:

$$\frac{R}{L}t = 1 \;\Rightarrow\; t = \frac{L}{R}$$

10 Schaltung mit Induktivität II

a) In der Spule wird eine Gegenspannung induziert, sodass der anfängliche Strom durch die Spule Null ist. Es folgt:

$$I_1 = I_2 = \frac{U}{R_1 + R_2} = 3,33A$$

b) Lange Zeit nach dem Öffnen, sind alle Ströme konstant, folglich kann die Spule durch einen Draht (Leiter) ersetzt werden. Der Strom in R_3 ist $I_1 - I_2$. Aus der Maschenregel folgt:

$$U - I_1 R_1 - I_2 R_2 = 0 \;\text{ und }\; U - I_1 R_1 - (I_1 - I_2) R_3 = 0$$

Gleichungssystem lösen liefert:

$$I_1 = \frac{U(R_2 + R_3)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = 4,55A$$

$$I_2 = \frac{U R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = 2,73A$$

c) Die linke Masche ist nun unterbrochen. Da hier keine Spule vorhanden ist, sinkt der Strom I_1 sofort auf Null. Der Strom durch R_3 ändert sich nur geringfügig, da sich in seiner Masche eine Spule befindet, die das sinkende Feld aufrecht zu erhalten versucht. Unmittelbar nach dem Öffnen ist der Strom durch R_3 so groß wie vor dem Öffnen: $I_1 - I_2 = 1,82A$. Das ist ebenso die Stromstärke durch R_2

d) Keine Spannungsquellen mehr: Strom überall Null