Aufgaben zur Experimentalphysik II: Elektromagnetische Schwingungen und Wellen

Musterlösung

William Hefter - 10/09/2009

1. Elektromagnetische Schwingungen

1. Die dafür benötigte Zeit ist $t = \frac{T}{4}$, wobei T die Periodendauer ist, die durch $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{LC}$ gegeben ist. Also ist
$$t = \frac{T}{4} = \pi\sqrt{LC} = 0,7\,\text{ms}$$

2. **(a)** Nachdem der Schalter auf Position b gestellt wurde, wird der untere Schaltkreis zu einem LC-Kreis, mit Kreisfrequenz $\omega = 1/\sqrt{LC}$ und Frequenz $f = \frac{\omega}{2\pi} = 275\text{Hz}$.
(b) Der Kondensator ist zu Beginn der Schwingung auf $U = 34\text{V}$ aufgeladen, der Strom ist 0. Die Ladung auf dem Kondensator ist also $q = CU = 210\mu\text{C}$. Die Amplitude erhält man aus der Lösung des Differentialgleichung des Schwingkreises zu
$$I = \omega q = 0,365\text{A}$$

3. **(a)** Die Gesamtenergie setzt sich zusammen aus der Energie im Magnetfeld und der im elektrischen Feld:
$$W = W_E + W_B = \frac{q_0^2}{2C} + \frac{i_0^2 L}{2} = 1,98\mu\text{J}$$
(b) Die Kondensator ist maximal aufgeladen, wenn er die gesamte Energie des Schwingkreises enthält, d.h.
$$W \stackrel{!}{=} \frac{q^2}{2C} \Rightarrow q = 5,56\mu\text{C}$$
(c) Der maximale Strom fliesst, wenn die gesamte Energie sich in der Spule bzw. im Magnetfeld befindet, also
$$W \stackrel{!}{=} \frac{i^2 L}{2} \Rightarrow i = 12,6\text{mA}$$
(d) Aus der angegebenen Relation folgt für $t = 0$
$$\varphi = \arccos\left(\frac{q_0}{q}\right) = \pm 46,9^\circ$$
wobei q_0 die Ladung zum Zeitpunkt 0 ist. Das Vorzeichen bestimmt, ob der Kondensator geladen oder entladen wird, worüber die erste Ableitung $-\omega q \sin\varphi$ eine Aussage macht. Sie soll positiv sein, da der Kondensator geladen wird, was für $\varphi = -46,9^\circ$ der Fall ist.
(e) Für diesen Fall soll der Kondensator entladen werden, also $\varphi = +46,9^\circ$.

4. Da die maximale Energy des Kondensators durch $\frac{q_{max}^2}{2C}$ gegeben ist, wobei q_{max} die maximale Ladung ist, muss die Zeit gefunden werden, für die
$$\frac{q_{max}^2}{2C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{2C}$$
gilt, also $q_{max} = \frac{Q}{\sqrt{2}}$. Mit der bekannten Lösung des RLC-Schwingkreises folgt für q_{max}
$$\begin{aligned} q_{max} &= Qe^{-\frac{Rt}{2L}} \\ \Rightarrow t &= -\frac{2L}{R}\ln\left(\frac{q_{max}}{Q}\right) = \frac{L}{R}\ln 2 \end{aligned}$$

5. **(a)** Die Spannung am Generator erreicht ihr Maximum, wenn $\sin(\omega_a t - \frac{\pi}{4}) = 1$, oder $\omega_a t - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \pm 2n\pi$, mit einer ganzen Zahl n. Die Spannung wird für $n = 0$ zum ersten Mal maximal, also $\omega_a t - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ oder

$$t = \frac{3\pi}{4\omega_a} = 6,73\text{ms}$$

(b) Diesselbe Argumentation wie oben, nur das Argument des Sinus ist verschieden, insgesamt ergibt sich

$$t = \frac{5\pi}{4\omega_a} = 11,2\text{ms}$$

(c) Die Strom hinkt der Spannung um $\frac{\pi}{2}$ hinterher, das zusätzliche Bauteil muss also eine Induktivität sein.
(d) Die Amplitude des Stroms I hängt mit der Amplitude U_L der Spannung zusammen über $U_L = IX_L$, wobei X_L die Impedanz der induktivität ist, gegeben durch $X_L = \omega_a L$. Weiterhin gibt es nur ein Bauteil im Schaltkreis, weswegen die vom Spannungsgenerator gegebene Spannung vollständig an der Induktivität abfallen muss, also $U_L = U_m$. Insgesamt erhält man

$$L = \frac{U_m}{I\omega_a} = 0,138\text{H}$$

6. Mit der Maschenregel erhält man sofort

$$\begin{aligned} -\frac{Q}{C} - L\frac{di}{dt} &= 0 \\ \Leftrightarrow \ddot{Q} + \frac{1}{LC}Q &= 0 \\ \Leftrightarrow \ddot{Q} + \omega_0^2 Q &= 0 \end{aligned}$$

d.h. die Spannung an Kondensator und Spule muss gleich sein, was auch logisch erscheint.
(a) Die Spannung soll zum Zeitpunkt 0 also U_0 sein (Anfangsbedingung). Die Lösung der DGL ist gerade

$$Q(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

wobei A und B durch die Anfangsbedingungen $U(0) = U_0$ und $\dot{U}(0) = 0$ bestimmt sind:

$$A = CU_0,\ B = 0$$

womit die Lösung lautet

$$\begin{aligned} Q(t) &= CU_0\cos\omega t \\ U(t) &= U_0\cos\omega t \end{aligned}$$

(b) Die gesamte gespeicherte Energie ist

$$W = \frac{1}{2}CU^2$$

und muss gleich der in der Spule gespeicherten Energie sein zu dem Zeitpunkt, an dem der Strom maximal ist:

$$W = \frac{1}{2}Li^2 \Rightarrow i = \sqrt{\frac{2W}{L}} = 3,16\text{A}$$

7. Zur Lösung zeichnen wir uns die relevanten Größen ein:

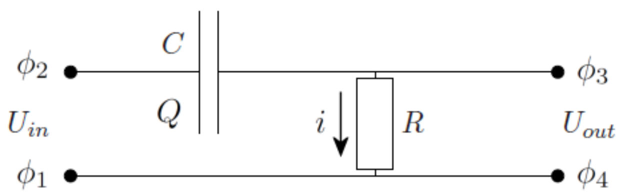

Abbildung 1: Skizze zu Aufgabe 1.7

(a) Mit der Definition $U_{in} = \phi_2 - \phi_1$ und $U_{out} = \phi_3 - \phi_4$ sowie der Festlegung, dass Q die Ladung auf der linken Kondensatorplatte und i den Strom in der linken Masche bezeichnet, ergibt eine Anwendung der Maschenregel auf die linke Masche (hier im Uhrzeigersinn, also in Stromrichtung durchlaufen):

$$-\frac{Q}{C} - iR + U_{in} = 0$$

Auf die rechte "Masche" angewendet ergibt sich

$$U_{out} = iR$$

Damit kann man eine Differentialgleichung für U_{out} aufstellen, sinnvoller ist es aber, eine für Q aufzustellen. Mit $i = \dot{Q}$ folgt

$$\dot{Q} + \frac{1}{RC}Q = \frac{U_{in}}{R}$$

(b) Nun lautet die DGL

$$\dot{Q} + \frac{1}{RC}Q = \frac{U_0}{R}\sin\omega t$$

Die homogene Lösung sehen wir mit scharfem Blick

$$Q_{hom} = Q_0 e^{\frac{t}{RC}}$$

Für die *partikuliäre* Lösung erinnern wir uns, dass diese die Struktur der Anregung wiederspiegeln muss, in diesem Fall also eine Linearekombination von sin und cos sein muss. Als partikulären Ansatz wählen wir also

$$Q = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

Wobei ω *nichts* mit der Eigenfrequenz einer harmonischen Oszillators zu tun hat, sondern die Anregungsfrequenz darstellt. Einsetzen ergibt

$$-A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t + \frac{1}{RC}(A\cos\omega t + B\sin\omega t) = \frac{U_0}{R}\sin\omega t$$

Dies sortieren wir nach sin und cos-Termen. Da diese linear unabhängig sind, müssen die Koeffizienten für sich genommen Null sein:

$$\sin\omega t\left(-A\omega + \frac{B}{RC} - \frac{U_0}{R}\right) + \cos\omega t\left(B\omega + \frac{A}{RC}\right) = 0$$

$$\begin{aligned} -A\omega + \frac{B}{RC} &= \frac{U_0}{R} \\ B\omega + \frac{A}{RC} &= 0 \end{aligned}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems ist

$$\begin{aligned} A &= -\frac{U_0\omega RC^2}{\omega^2R^2C^2+1} \\ B &= \frac{U_0C}{\omega^2R^2C^2+1} \end{aligned}$$

Womit die Lösung zunächst so aussieht:

$$Q(t) = \frac{U_0C}{\omega^2R^2C^2+1}\left(-\omega RC\cos\omega t + \sin\omega t\right)$$

Das kann man mit Hilfe des Additionstheorems $a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x + \arctan\frac{b}{a})$ weiter vereinfachen

$$Q(t) = \frac{U_0C}{\sqrt{\omega^2R^2C^2+1}}\sin\left(\omega t - \arctan\omega RC\right)$$

(c) Ausserdem erinnern wir uns an

$$U_{out} = iR = \dot{Q}R = \frac{U_0 RC\omega}{\sqrt{\omega^2 R^2 C^2 + 1}} \cos(\omega t + \varphi)$$

Zunächst sehen wir, dass für $\omega \to 0$ auch die Ausgangsamplitude gegen 0 geht. Tiefe Frequenzen werden also nicht durchgereicht. Demgegenüber gilt für hohe Frequenzen:

$$\begin{aligned}\lim_{\omega\to\infty} U_{out} &= \lim_{\omega\to\infty} U_{out} RC \frac{1}{\sqrt{R^2C^2 + \frac{1}{\omega^2}}} \cos(\omega t + \varphi) \\ &= U_{out} \cos(\omega t + \varphi)\end{aligned}$$

Für hohe Frequenzen geht die Amplitude gegen die Eingangsamplitude, nur eine Phasenverschiebung findet statt. Wir haben also insgesamt einen *Hochpass* erhalten.

8. Die Lösungsskizze kann z.B. so aussehen:

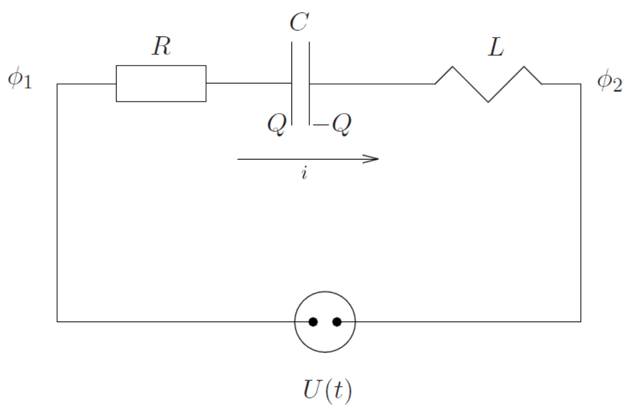

Abbildung 2: Skizze zu Aufgabe 1.8

Die Eingangsspannung $U(t) = \phi_1 - \phi_2$ ist so definiert, dass sie den Strom in die angegebene Richtung treibt, wenn sie positiv ist. Q bezeichnet die Ladung auf der linken Kondensatorplatte. Wir durchlaufen die Masche in Stromrichtung und erhalten

$$0 = -iR - \frac{Q}{C} - L\frac{di}{dt} + U$$

Mit $i = \dot{Q}$ also

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + \frac{1}{LC}Q = \frac{U(t)}{L}$$

Oder, sinnvoller geschrieben

$$\ddot{Q} + 2\beta\dot{Q} + \omega_0^2 Q = \frac{U(t)}{L}$$

Diese Schreibweise ist bei der Lösung sinnvoller und spart Schreibarbeit, wie wir unten sehen werden. Ausserdem wird die physikalische Bedeutung der einzelnen Terme sichtbarer, so ist 2β z.B. der Dämpfungsterm und ω_0 die Eigenfrequenz des Schwingkreises.
(a) Direktes Lösen der angetriebenen Differentialgleichung mit Standard-Methoden ergibt

$$Q(t) = e^{-\beta t}\left(\cos(\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}t) + D\sin(\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}t)\right) + \frac{U_0/L}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}\left((\omega_0^2 - \omega^2)\cos\omega t + 2\omega\beta\sin\omega t\right)$$

Wobei der erste Summand die homogene Lösung und der zweite die partikuläre eingeschwungene Lösung darstellt. Letztere erhält man auch, wenn man analog zu Aufgabe 7 einen eingeschwungenen Ansatz macht, also $Q(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$.
(b) Die von der Spannungsquelle abgegebene Leistung ist

$$\begin{aligned}P(t) &= i(t)U(t) = \dot{Q}(t)U(t) \\ &= U_0(-A\omega\sin\omega t\cos\omega t + B\omega\cos^2\omega t)\end{aligned}$$

Der zeitliche Mittelwert von $\sin \omega t \cos \omega t$ ist gerade Null und der von $\cos^2$ gerade $\frac{1}{2}$, also

$$\bar{P} = \frac{U_0 B \omega}{2} = \frac{\beta \omega^2 U_0^2 / L}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}$$

Die am Widerstand verbratene Leistung ist gegeben durch

$$W(t) = Ri^2(t) = R(\omega^2 A^2 \sin^2 \omega t + \omega^2 B^2 \cos^2 \omega t - 2AB\omega^2 \sin \omega t \cos \omega t)$$

Hier fällt auch wieder der $\sin \omega t \cos \omega t$ bei zeitlicher Mittelung raus und es bleibt

$$\bar{W} = \frac{1}{2} R \omega^2 (A^2 + B^2) = \frac{\beta}{L} \frac{U_0^2 \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}$$

2. Elektromagnetische Wellen

1. Die auf dem Mond beleuchtete Region ist ein Kreis mit Radius $R = \frac{r\theta}{2}$, wobei $r = 3{,}82 \cdot 10^8$m der Abstand Erde-Mond ist. Die Fläche ist dann
$$A = \pi R^2 = 8{,}88 \cdot 10^4 \text{m}^2$$

2. **(a)** Der mittlere Energiefluß pro Fläche, also die Intensität, steht mit der Amplitude E der elektrischen Feldstärke in Verbindung über

$$I = \frac{\mu_0 c}{2} E^2$$
$$\Rightarrow E = \sqrt{2\mu_0 c I} = 87\text{m}\frac{\text{V}}{\text{m}}$$

(b) Die Amplitude des magnetischen Feldes erhält man über

$$B = \frac{E}{c} = 2{,}9 \cdot 10^{-10}\text{T}$$

(c) Im Abstand r des Senders ist die Intensität $I = P/4\pi r^2$, wobei P die Gesamtleistung des Senders ist. Also
$$P = 4\pi r^2 I = 1{,}3 \cdot 10^4 \text{W}$$

3. **(a)** Aus $c = \lambda f$ folgt
$$f = \frac{c}{\lambda} = 10^8 \text{Hz}$$

(b) Die Amplitude des magnetischen Feldes ist

$$B = \frac{E}{c} = 10^{-6}\text{T}$$

und muss in positive z-Richtung zeigen, damit für die gegebene Richtung des E-Feldes $\vec{E} \times \vec{B}$ in x-Richtung zeigt.
(c) Es ist

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2{,}1 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$
$$w = 2\pi f = 6{,}3 \cdot 10^8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

(d) Die Intensität ist gegeben durch

$$I = \frac{E^2}{2\mu_0 c} = 119 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

4. **Wellen** sind alle Funktionen, die die Wellengleichung erfüllen. **Elektromagnetische Wellen** sind alle Lösungen der Maxwell-Gleichungen im Vakuum, also abseits jeder Ladungs- und Stromverteilungen. Eine **ebene** Welle ist eine, bei der die Flächen *konstanter Phase* Ebenen sind und die Auslenkung bzw. die Amplitude der Schwingung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung ist. Eine **monochromatische** Welle besteht nur aus einer Frequenz, besteht also aus genau einer harmonischen Funktion, d.h. sin oder cos mit genau einer Frequenz.

5. Elektromagnetische Felder sind Lösungen der Maxwell-Gleichungen, wobei letztere **lineare** Differentialgleichungen sind. Daher sind Linearekombinationen von deren Lösungen wiederrum Lösungen. Für das Überlagerungsfeld benötigt man die Identität

$$\begin{aligned}\cos x + \cos y &= \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix} + e^{iy} + e^{-iy}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(e^{\frac{i}{2}(2x+y-y)} + e^{\frac{i}{2}(x-x-+y)} + e^{\frac{i}{2}(x-x-2y)} + e^{\frac{i}{2}(-2x-y+y)}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(e^{\frac{i}{2}(x+y)} + e^{-\frac{i}{2}(x+y)}\right)\left(e^{\frac{i}{2}(x-y)} + e^{-\frac{i}{2}(x-y)}\right)\\ &= 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\end{aligned}$$

Damit wird das Feld zu

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r},t) &= \vec{E}_1(\vec{r},t) + \vec{E}_2(\vec{r},t)\\ &= \vec{e}_z E\left\{\cos(\omega t - \vec{k}_1\cdot\vec{r}) + \cos(\omega t - \vec{k}_2\cdot\vec{r})\right\}\\ &= 2\vec{e}_z E\cos\left(\omega t - \frac{1}{2}(\vec{k}_1+\vec{k}_2)\cdot\vec{r}\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{2}(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\cdot\vec{r}\right)\end{aligned}$$

Woraus die zeitliche Entwicklung zu erkennen ist: eine ebene Welle $\cos(\omega t - \vec{k}'\cdot\vec{r})$ mit neuem Wellenvektor $\vec{k}'$, die durch den zweiten Cosinus amplitudenmoduliert wird.

6. Die Intensität ist gegeben durch den Poynting-Vektor

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}\\ &= \epsilon_0 c\frac{\alpha^2}{r^2}\sin^2\theta\cos^2(\omega t - kr)\vec{e}_r\end{aligned}$$

der im vorliegenden Fall in radiale Richtung zeigt, was anschaulich auch mit dem Energiefluss übereinstimmt. Der Poynting-Vektor ist auf der Halbkugel nicht konstant, weshalb man das Flußintegral auswerten muss:

$$\begin{aligned}P &= \int\limits_{Halbkugel}\vec{S}\cdot d\vec{A} =\\ &= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{\pi/2} d\theta sin\theta r^2\left|\vec{S}\right|\\ &= \frac{4\pi}{3}\epsilon_0 c\alpha^2\cos^2(\omega t - kr)\end{aligned}$$

Die mittlere Strahlungsleistung erhält man durch Mittelung von P über eine Periode, also

$$\bar{P} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T P(t')dt'$$

Bekanntermassen ist der zeitliche Mittelwert von $\cos^2$ (und $\sin^2$) genau gleich $\frac{1}{2}$ (nachrechnen!), womit sich ergibt

$$\bar{P} = \frac{2\pi}{3}\epsilon_0 c\alpha^2 = 55,5\text{W}$$

7. Um die Forderungen zu zeigen, setzen wir das angegebene Feld in die Maxwell-Gleichungen ein. Beispielhaft für das $\vec{E}$-Feld:

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\vec{E} &\overset{!}{=} 0 \\
\Leftrightarrow \mathrm{div}\left(\vec{E}_0 f(ct - \vec{n}\cdot\vec{r})\right) &= \vec{E}_0 \vec{\nabla} f(ct - \vec{n}\cdot\vec{r}) \\
&= -\vec{E}_0 f'(ct - \vec{n}\cdot\vec{r}) \cdot \vec{n} \\
\Rightarrow \vec{E}_0 \cdot \vec{n} &= 0
\end{aligned}$$

Also muss das $\vec{E}$-Feld senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung stehen. Die Rechnung für das $\vec{B}$-Feld läuft analog. Zum Beweis der letzten Forderung bemüht man die Rotationsgleichungen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\vec{E} &\overset{!}{=} -\dot{\vec{B}} \\
\Leftrightarrow \mathrm{rot}\left(\vec{E}_0 f(ct - \vec{n}\cdot\vec{r})\right) &= -\vec{E}_0 \times \vec{\nabla} f(ct - \vec{n}\cdot\vec{r}) \\
&= -\vec{E}_0 \times \left(f'(ct - \vec{n}\cdot\vec{r}) \cdot (-\vec{n})\right) \\
&= -\vec{B}_0 f'(ct - \vec{n}\cdot\vec{r}) \cdot c \\
\Rightarrow c\vec{B}_0 &= \vec{n} \times \vec{E}_0
\end{aligned}$$

8. **(a)** Es gelten: $\mathrm{div}\vec{E} = 0$, $\mathrm{div}\vec{B} = 0$, $\mathrm{rot}\tilde{\mathrm{E}} = -\dot{\tilde{\mathrm{B}}}$, $\mathrm{rot}\vec{B} = \frac{1}{c^2}\dot{\vec{E}} + \mu_0\vec{j}$ sowie $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ mit $\sigma > 0$. Mit der Vektoridentität

$$\mathrm{rotrot}\vec{A} = \mathrm{graddiv}\vec{A} - \Delta\vec{A}$$

folgt

$$\begin{aligned}
\mathrm{rotrot}\vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\dot{\vec{E}} + \mu_0\vec{j}\right) \\
&= -\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{c^2}\dot{\vec{E}} - \mu_0\sigma\dot{\vec{E}} \\
\Rightarrow \Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\ddot{\vec{E}} &= \frac{\sigma}{\epsilon_0 c^2}\dot{\vec{E}}
\end{aligned}$$

(b) Einsetzen des Ansatzes ergibt

$$\begin{aligned}
-k^2 E_0 \vec{e}_z e^{i(\omega t - kx)} - \frac{1}{c^2}(i\omega)^2 E_0 \vec{e}_z e^{i(\omega t - kx)} &= \frac{\sigma}{\epsilon_0 c^2} i\omega E_0 \vec{e}_z e^{i(\omega t - kx)} \\
\Leftrightarrow k^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} - i\frac{\sigma\omega}{\epsilon_0 c^2}
\end{aligned}$$

Zur Bestimmung von k: es sei $k = k_r + ik_i$ mit $k_r,\ k_i \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$k^2 = k_r^2 - k_i^2 + 2ik_r k_i$$

Abgleich:

$$\begin{aligned}
\text{(i)}\ k_r^2 - k_i^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} \\
\text{(ii)}\ 2k_r k_i &= -\frac{\sigma\omega}{\epsilon_0 c^2}
\end{aligned}$$

Lösen ergibt:

$$\begin{aligned}
k_r &= \pm\sqrt{\frac{\omega^2}{2c^2} + \sqrt{\frac{\omega^4}{2c^4} + \frac{\sigma^2\omega^2}{4\epsilon_0^2 c^4}}} \\
k_i &= \pm\sqrt{-\frac{\omega^2}{2c^2} + \sqrt{\frac{\omega^4}{2c^4} + \frac{\sigma^2\omega^2}{4\epsilon_0^2 c^4}}}
\end{aligned}$$

Das "+" vor der inneren Wurzel ist so gewählt ,dass k_r und k_i reell sind. Die Vorzeichen von k_r und k_i sind durch (ii) bestimmt sowie

$$e^{i(\omega t-kx)} = e^{i\omega t}e^{-ik_r x}e^{k_i x}$$

(c)k_i muss also negativ sein und eine Art Abklinglänge darstellen. Der Imaginärteil der Wellenzahl ist also für die Dämpfung bzw. Absorption in einem leitenden Medium verantwortlich.