TU München, 19.08.2009

Musterlösung

Ferienkurs Experimentalphysik II:
Elektrostatik und elektrischer Strom

Rolf Ripszam

1 Geladener Stab

(a) Der Stab ist homogen geladen, also gilt einfach $\lambda = \frac{-q}{L}$.
(b) Das Feld eines kleinen Stabstückchens ist gerade

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda dx}{(x+a)^2}$$

Das Gesamtfeld ergibt sich einfach durch Integrieren über den Stab:

$$E = \int_0^L dE = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{-1}{x+a}\right]_0^L = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{L}{a(L+a)} \overset{\lambda=\frac{-q}{L}}{=} \frac{-q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a(L+a)}$$

Das Minuszeichen deutet darauf hin, dass das Feld weg vom negativ geladenen Leiter zeigt.
(c) Für $a \gg L$ ist $(L+a) \approx a$ und

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

Was dem Feld einer Punktladung entspricht.

2 Kugel mit Hohlraum

Dieses Problem lässt sich mit Hilfe des Superpositionsprinzips leicht lösen. Denn die Kugel mit dem „Loch" lässt sich darstellen als Überlagerung von

1. Kugel 1 mit Radius R und Mittelpunkt im Ursprung mit homogener Ladungsdichte ρ und
2. Kugel 2 mit Radius R/2 und Mittelpunkt $\frac{R}{2}\hat{e_z}$ mit homogener Ladungsdichte -ρ.

Dann besagt das Superpositionprinzip, dass das Feld der kombinierten Ladungsverteilung die Summe der Felder der einzelnen Ladungsverteilungen ist.
Also im Punkt A:

$$\vec{E}(A) = \vec{E_1}(A) + \vec{E_2}(A)$$

Dabei ist gemäß der Angabe

$$\vec{E_1}(A) = 0$$

und

$$\vec{E_2}(A) = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0(R/2)^3}(-\frac{R}{2}\hat{e_z}) = -\frac{Q_2}{\pi\epsilon_0 R^2}\hat{e_z}$$

mit

$$Q_2 = -\rho\frac{4\pi}{3}(R/2)^3 = -\frac{\pi}{6}\rho R^3$$

also

$$\vec{E}(A) = +\frac{\rho R}{6\epsilon_0}\hat{e_z}$$

Entsprechend im Punkt B:

$$\vec{E}(B) = \vec{E_1}(B) + \vec{E_2}(B)$$

Dabei ist gemäß der Angabe

$$\vec{E_1}(B) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R^3}(-R\hat{e_z}) = -\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R^2}\hat{e_z}$$

mit

$$Q_1 = \rho\frac{4\pi}{3}R^3$$

und

$$\vec{E_2}(B) = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0(3R/2)^3}(-\frac{3R}{2}\hat{e_z}) = -\frac{Q_2}{9\pi\epsilon_0 R^2}\hat{e_z}$$

mit

$$Q_2 = -\frac{\pi}{6}\rho R^3$$

also

$$\vec{E}(B) = -\frac{\rho R}{3\epsilon_0}\hat{e_z} + \frac{\rho R}{54\epsilon_0}\hat{e_z} = -\frac{17\rho R}{54\epsilon_0}\hat{e_z}$$

D.h. das Feld zeigt also im Punkt A nach oben und im Punkt B nach unten, in beiden Fällen also von der Ladungsverteilung weg, was klar ist, da es sich ja um eine positive Ladung handelt. Die Feldstärke im Punkt B ist etwa doppelt so groß wie die im Punkt A, was ebenfalls anschaulich ist, da in Punkt B die gesamte abstoßende Kraft der gelöcherten Kugel nach unten zeigt, während in Punkt A die nach oben gerichtete Abstoßung durch die untere Halbkugel teilweise von der nach unten gerichteten Abstoßung durch den Rest der oberen Halbkugel kompensiert wird.

3 Zylinder

(a) Wir legen eine zylindrische Gauß´sche Oberfläche der Länge L und mit Radius r um die gesamte Anordnung. Aus Symmetriegründen muss das E-Feld überall auf der Oberfläche senkrecht stehen und parallel zum Normalenvektor sein, also wird das Flußintegral besonders einfach. Die eingeschlossene Ladung ist gerade $Q = q - 2q = -q$, und

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA = E2\pi rL = \frac{-q}{\epsilon_0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{E} = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0 rL}\hat{e_r}$$

Das Minuszeichen deutet an, dass das E-Feld nach Innen gerichtet ist.
(b) Wir legen eine zylindrische Gauß´sche Oberfläche in die Röhre rein, so dass sie die innere Seite mit einschliesst, nicht jedoch die äußere. Da wir uns in einem Leiter befinden, ist das Feld 0, also muss auch die enthaltene Ladung gleich 0 sein. Auf dem inneren Zylinder befindet sich die Ladung q, folglich liegt auf der inneren Wand der Röhre die Ladung -q. Nach Außen hin muss die Anordnung die Gesamtladung -q vorzeigen, also muss auf der äußeren Oberfläche nochmals die Ladung -q liegen.
(c) Überlegung ist völlig analog zu (a), nur dass der Zylinder diesmal nur den inneren Stab und somit die Ladung q einschliesst. Also ist das Feld

$$\vec{E} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 rL}\hat{e_r}$$

4 Metallplatte

Das Feld einer leitenden Metalloberfläche ist gegeben durch $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$. Die Arbeit, die das Feld am Elektron verrichtet, ist gerade gleich $W = -F_{el}d = -e\frac{\sigma}{\epsilon_0}d$. Laut Angabe hat das Elektron mit 100eV gerade genug Energie, um die Platte zu erreichen, also ist

$$W = -e\frac{\sigma}{\epsilon_0}d = 100eV = 100 \cdot e \cdot J$$

$$\Leftrightarrow d = 4,4 \cdot 10^{-4}m$$

5 Potential einer homogen geladenen Kugel

Die Ladungsdichte ist gerade $\rho = \frac{q}{4/3\pi R^3}$ und die eingeschlossene Ladung innerhalb einer Gauß´schen Fläche des Radius $r < R$ ist dann $Q = \rho\frac{4}{3}\pi r^3 = q\frac{r^3}{R^3}$. Für das Feld folgt aus $\int \vec{E}d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}$.

a) Es sei nun $\phi = 0$ bei r = 0.

1. Die Abhängigkeit des Potentials erhält man über

$$\begin{aligned} \phi(r) - \underbrace{\phi(0)}_{Nullpunkt} &= -\int_0^r Edr \\ \phi(r) - 0 &= -\int_0^r \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \\ \phi(r) &= -\frac{qr^2}{8\pi\epsilon_0 R^3} \end{aligned}$$

2. Da $\phi(0) = 0$ ist jedes mit dem Ergebnis aus 1. berechnete Potential gerade die Potentialdifferenz zum Mittelpunkt, für r = R folgt

$$\phi(R) = -\frac{q}{8\pi\epsilon_0 R}$$

3. Alle Punkte außerhalb des Ursprungs haben negatives Potential, also ist der Ursprung gerade der Punkt des höchsten Potentials.

b) Hier müssen wir zur Bestimmung des Potentials anders vorgehen. Wir kennen die Formel für die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten, im Speziellen gilt hier deshalb

$$\phi(R) - \phi(r) = -\int_r^R Edr = -\int_r^R \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} = -\frac{q}{8\pi\epsilon_0 R^3}(R^2 - r^2)$$

Die linke Seite enthält aber auch das bekannte Potential auf der Oberfläche einer Punktladung, nämlich $\phi(R)$, also ist

$$\begin{aligned} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} - \phi(r) &= -\frac{q}{8\pi\epsilon_0 R^3}(R^2 - r^2) \\ \Leftrightarrow \phi(r) &= \frac{q(3R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3} \end{aligned}$$

Die Potentialdifferenz zum Ursprung ist

$$\phi(R) - \phi(0) = \frac{2q}{8\pi\epsilon_0 R} - \frac{3q}{8\pi\epsilon_0 R} = \frac{-q}{8\pi\epsilon_0 R}$$

Das Potential innerhalb der Kugel ist also anders als das in a) bestimmte, die Differenz zwischen Oberfläche und Ursprung aber gleich. Dies liegt ganz einfach an der Definition des Nullpunkts. Die Angabe eines absoluten Potentials ist direkt von diesem abhängig, bei einer Differenz kürzen sich die Eichfaktoren jedoch raus.

6 Dipolmoment eines Wassermoleküls

(a) In der Vorlesung wurde die Formel für die Energie eines Dipols im äußeren Feld angegeben:

$$W = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

In der Gleichgewichtslage (minimale Energie) zeigt der Dipolmomentvektor $\vec{p}$ parallel zum $\vec{E}$-Feld. Nach einer Drehung um 180° ist $\vec{p}$ antiparallel zu $\vec{E}$ und die Energie des Dipols ist maximal. Die aufzuwendene Energiedifferenz ist also

$$\Delta W = W(180°) - W(0°) = |\vec{p}||\vec{E}| - (-|\vec{p}||\vec{E}|) = 2|\vec{p}||\vec{E}| = 1,5 \cdot 10^{-25}J = 0.936\mu eV$$

(b) Wegen

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$$

und da $\vec{p}$ in der neuen Position antiparallel zu $\vec{E}$ ist, ist das Drehmoment null.

7 Kugelkondensator

(a) Lädt man einen Kugelkondensator der beschriebenen Art mit der Ladung Q auf (also beispielsweise die innere Schale mit Q und die äußere mit -Q), dann herrscht im Inneren kein Feld, im Zwischenraum $R_1 < r < R_2$ das Feld

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{e_r}$$

und im Außenraum ebenfalls kein Feld. Die Potentialdifferenz (= Spannung U) zwischen der inneren und der äußeren Schale ist dann gegeben durch das Linienintegral

$$U = \phi_1 - \phi_2 = \int_{R_1 \to R_2} \vec{dr} \cdot \vec{E}(\vec{r})$$

Wählt man einen radialen Integrationsweg, dann ist $\vec{dr} = \hat{e_r} dr$ und das Integral wird zu:

$$U = \phi_1 - \phi_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2})$$

Man erkennt also, dass sich eine Spannung aufbaut, die proportional zur auf den Kondensator gebrachten Ladung ist. Dann ist die Kapazität definitionsgemäß der inverse Proportionalitätsfaktor:

$$U = \frac{Q}{C}$$

also

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

(b) Die Radien der beiden Kugeln seien R_1 und R_2. Es wird nun die Ladung Q auf das kombinierte System gebracht, die sich auf die beiden Kugeln verteilt. Die (noch unbekannten) Ladungen der Kugeln seien Q_1 und Q_2 mit $Q_1 + Q_2 = Q$. Dann sind ihre Potentiale gegeben durch

$$\phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1}{R_1} \quad , \quad \phi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_2}{R_2}$$

(Da der Verbindungsdraht lang sein soll, sind die Kugeln weit voneinander entfernt und beeinflussen einander nicht durch Influenz.) Der leitende Verbindungsdraht sorgt für $\phi_1 = \phi_2$, also

$$\frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2} \text{ bzw. } \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

Zusammen mit der Bedingung $Q_1 + Q_2 = Q$ folgt daraus:

$$Q_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}Q \quad , \quad Q_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}Q$$

Damit findet man nun das Potential der Kugeln

$$\phi_1 = \phi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R_1 + R_2}$$

bzw.

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R_1 + R_2}$$

für die Spannung der Kugeln (gegenüber dem Unendlichen). Wie in Teil (a) ist die Spannung proportional zur (Gesamt-)Ladung, also hat man für die Kapazität $C = Q/U$:

$$C = 4\pi\epsilon_0(R_1 + R_2)$$

also die Summe der Kapazitäten der einzelnen Kugeln. Die Verteilung der Ladung Q haben wir im Laufe der Rechung schon gefunden:

$$Q_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}Q \quad , \quad Q_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}Q$$

Die Ladungen verhalten sich also wie die Radien:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

so dass auf der größeren Kugel auch die größere Ladung sitzt. Die Feldstärken an den Oberflächen ergeben sich aus den Ladungen:

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1}{R_1^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1(R_1+R_2)}$$
$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_2}{R_2^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2(R_1+R_2)}$$

Das bedeutet:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

Die Feldstärken verhalten sich also umgekehrt wie die Radien. An der Oberfläche einer kleinen Kugel bildet sich eine große Feldstärke – wobei ihre Ladung nur klein ist. Dies ist ein Spezialfall des sog. Spitzeneffekts: Auf einem Leiter bildet sich dort eine große Feldstärke, wo die Oberfläche stark gekrümmt ist. Zahlenwerte:

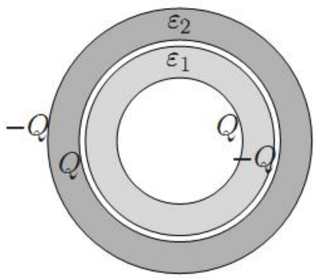
$$E_1 = 1200N/C \quad , \quad E_2 = 600N/C$$

8 Kugelkondensator mit Dielektrikum

Vorbemerkung: Die Kapazität eines Kugelkondensator mit innerem bzw. äußerem Radius R_i bzw. R_a wird durch ein Dielektrikum im Zwischenraum um den Faktor ϵ vergrößert:

$$C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 \frac{R_a R_i}{R_a - R_i}$$

(a) Wir denken uns nun den gegebenen Kondensator als Grenzfall von zwei ineinandergesteckten Kugelkondensatoren mit kleinem Luftspalt: Auf beiden Kondensatoren befinde sich die Ladung Q, genauer: Auf der inneren



Schale des inneren Kondensators Q, auf seiner äußeren -Q. Ebenso für den äußeren Kondensator. Dann herrscht in allen luftgefüllten Gebieten kein Feld.
Die Spannung zwischen den beiden Schalen des inneren Kondensators ist

$$U_1 = \frac{Q}{C_1}$$

mit

$$C_1 = 4\pi\epsilon_1\epsilon_0 \frac{R_{1a}R_{1i}}{R_{1a} - R_{1i}}$$

und entsprechend für den äußeren Kondensator. Die Gesamtspannung zwischen innerster und äußerster Schicht der Anordnung ist also

$$U = U_1 + U_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{R_{1a}-R_{1i}}{\epsilon_1 R_{1a}R_{1i}} + \frac{R_{2a}-R_{2i}}{\epsilon_2 R_{2a}R_{2i}}\right)$$

Lässt man nun den Luftspalt gegen 0 gehen, d.h. $R_{1a} = R_{2i} =: R_m$ und definiert $R_{1i} := R_i$, $R_{2a} =: R_a$, dann erhält man hieraus für die Gesamtkapazität:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{R_m - R_i}{\epsilon_1 R_m R_i} + \frac{R_a - R_m}{\epsilon_1 R_a R_m}\right)$$

bzw.

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{\epsilon_1\epsilon_2 R_i R_m R_a}{\epsilon_1(R_a - R_m)R_i + \epsilon_2(R_m - R_i)R_a}$$

Anmerkung: Offenbar gilt

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

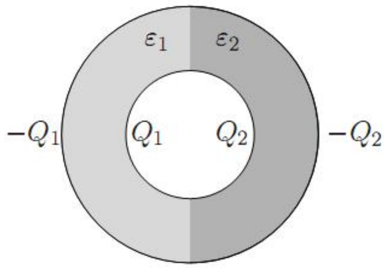
d.h. es handelt sich hier effektiv um eine Hintereinanderschaltung der beiden Kondensatorhälften. Die Flächenladungsdichte auf der inneren Kugelschale ergibt sich zu

$$\sigma_i = \frac{Q}{4\pi R_i^2} = \frac{CU}{4\pi R_i^2} = \frac{\epsilon_0\epsilon_1\epsilon_2 U R_m R_a/R_i}{\epsilon_1(R_a - R_m)R_i + \epsilon_2(R_m - R_i)R_a}$$

und die auf der äußeren Kugelschale entsprechend zu

$$\sigma_a = \frac{Q}{4\pi R_a^2} = \frac{CU}{4\pi R_a^2} = \frac{\epsilon_0\epsilon_1\epsilon_2 U R_i R_m/R_a}{\epsilon_1(R_a - R_m)R_i + \epsilon_2(R_m - R_i)R_a}$$

(b) In diesem Fall befinden sich beide Hälften einer Kugelschale auf demselben Potential, tragen aber unterschiedliche Ladungen. Es gilt



$$Q_1 = C_1 U \quad , \quad Q_2 = C_2 U$$

mit den *halben* Kapazitäten, also

$$C_1 = 2\pi\epsilon_1\epsilon_0 \frac{R_a R_i}{R_a - R_i} \quad , \quad C_2 = 2\pi\epsilon_2\epsilon_0 \frac{R_a R_i}{R_a - R_i}$$

Die Gesamtladung beträgt also

$$Q = Q_1 + Q_2 = 2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)\epsilon_0 \frac{R_a R_i}{R_a - R_i} U$$

und die Gesamtkapazität daher

$$C = 2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)\epsilon_0 \frac{R_a R_i}{R_a - R_i}$$

Anmerkung: Offenbar gilt

$$C = C_1 + C_2$$

d.h. es handelt sich hier effektiv um eine Parallelschaltung der beiden Kondensatorhälften.
Es gibt 4 Flächenladungsdichten:

$$\sigma_{1i} = \frac{Q_1}{2\pi R_i^2} = \frac{\epsilon_1\epsilon_0 U R_a/R_i}{R_a - R_i}$$

$$\sigma_{1a} = \frac{Q_1}{2\pi R_a^2} = \frac{\epsilon_1\epsilon_0 U R_i/R_a}{R_a - R_i}$$

$$\sigma_{2i} = \frac{Q_2}{2\pi R_i^2} = \frac{\epsilon_2\epsilon_0 U R_a/R_i}{R_a - R_i}$$

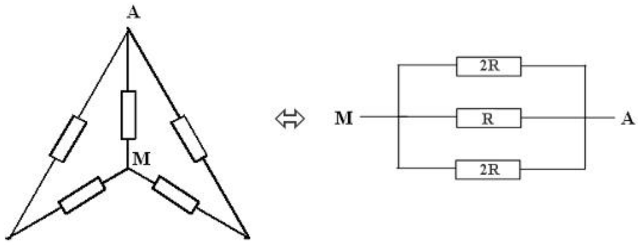
$$\sigma_{2a} = \frac{Q_2}{2\pi R_a^2} = \frac{\epsilon_2\epsilon_0 U R_i/R_a}{R_a - R_i}$$

9 Widerstandsnetzwerk

Wenn wir zwischen M und A eine Spannung anlegen, sehen wir direkt, dass zwischen den unteren Ecken des Dreiecks keine Potentialdifferenz auftritt. Der untere Widerstand kann also weggelassen werden. Die anderen Widerstände lassen sich entsprechend dem Ersatzschaltbild rechts umstellen.
Damit beträgt der Gesamtwiderstand:

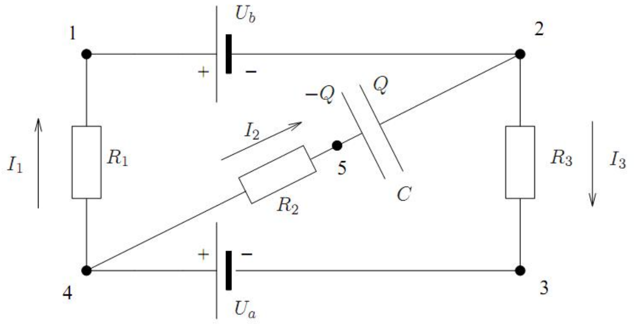
$$\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} = \frac{2}{R} \quad \Rightarrow \quad R_{Ges} = \frac{R}{2}$$

Analog lässt sich auch der Gesamtwiderstand zwischen je zwei Ecken des Dreiecks zu $\frac{R}{2}$ bestimmen.



10 Schaltkreis mit Kondensator

Der geschlossene Stromkreis sieht folgendermaßen aus: Wir definieren 5 Bezugspunkte 1,2,3,4,5, deren Potentiale



$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5$ für die Behandlung der Schaltung wichtig sind. Außerdem legen wir die positiven Stromrichtungen durch die Pfeile fest und bezeichnen mit Q die Ladung auf der rechten Kondensatorplatte. Dann kann man den äußeren Stromkreis 1,2,3,4,1 betrachten und die folgenden Gleichungen aufstellen

$$\begin{aligned} \phi_1 - \phi_2 &= U_b \\ \phi_2 - \phi_3 &= R_3 I_3 \\ \phi_3 - \phi_4 &= -U_a \\ \phi_4 - \phi_1 &= R_1 I_1 \end{aligned}$$

(Diese Gleichungen sind vorzeichenkorrekt im Sinne der oben gemachten Konventionen bezgl. Stromrichtungen etc.) Addiert man diese Gleichungen, dann ergibt sich auf der linken Seite null („Maschenregel“) und man erhält die Spannungsgleichung für den äußeren Stromkreis:

$$R_1 I_1 + R_3 I_3 = U_a - U_b$$

Für den Teilstromkreis 1,2,5,4,1 gelten entsprechend die Gleichungen:

$$\begin{aligned}\phi_1 - \phi_2 &= U_b \\ \phi_2 - \phi_5 &= \frac{Q}{C} \\ \phi_5 - \phi_4 &= -R_2 I_2 \\ \phi_4 - \phi_1 &= R_1 I_1\end{aligned}$$

Auch hier ergibt Addition auf der linken Seite null, und man erhält die Spannungsgleichung:

$$R_1 I_1 - R_2 I_2 + \frac{Q}{C} = -U_b$$

(Die Spannungsgleichung für den verbleibenden Teilstromkreis 2,3,4,5,2 enthält keine neue Information, da sie aus den beiden anderen folgt.) Außerdem hat man noch Stromerhaltung im Verzweigungspunkt 2:

$$I_3 = I_1 + I_2$$

(Die Stromerhaltung im Verzweigungspunkt 4 ist identisch dazu.)
Es bleibt noch der Zusammenhang zwischen I_2 und der Kondensatorladung Q:

$$I_2 = -\dot{Q}$$

Insgesamt hat man so 4 lineare Gleichungen für die 4 unbekannten Funktionen I_1, I_2, I_3, Q:

$$\begin{aligned}R_1 I_1 + R_3 I_3 &= U_a - U_b \\ R_1 I_1 - R_2 I_2 + \frac{Q}{C} &= -U_b \\ I_1 + I_2 - I_3 &= 0 \\ I_2 + \dot{Q} &= 0\end{aligned}$$

Indem man I_1, I_2, I_3 eliminiert, erhält man eine Gleichung in der nur Q auftritt:

$$\dot{Q} + \frac{R_1 + R_3}{(R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3)C} Q = -\frac{R_1U_a + R_3U_b}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}$$

Kürzt man den Koeffzienten von Q mit $1/\tau$ ab und die konstante rechte Seite mit $\dot{Q}_0$ (diese Bezeichnung macht physikalisch Sinn, denn die rechte Seite ist offenbar die Zeitableitung der Kondensatorladung wenn der Kondensator ungeladen ist, also zum Zeitpunkt t = 0), dann ist

$$\dot{Q} + \frac{1}{\tau} Q = \dot{Q}_0$$

mit der allgemeinen Lösung:

$$Q(t) = a e^{-t/\tau} + \tau \dot{Q}_0$$

(allgemeine: homogene Lösung plus spezielle inhomogene Lösung)
Einarbeitung der Anfangsbedingung:

$$Q(0) = a + \tau\dot{Q}_0 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad a = -\tau\dot{Q}_0$$

Also

$$Q(t) = \tau\dot{Q}_0 (1 - e^{-t/\tau})$$