Lösungen
Zeitlich veränderliche Felder und Wechselstrom

Martina Stadlmeier

09.09.2009

1. a) $B = \mu_0 \mu \frac{N}{l} I \Rightarrow \mu = \frac{Bl}{\mu_0 N I}$
   $L = \mu_0 \mu \frac{N^2}{l^2} V$
   $U_{ind} = -L \frac{\Delta I}{\Delta t} = -\frac{BNA}{\Delta t} = -10\,\mathrm{kV}$
   b) $I(t < 0) = 1\,\mathrm{A}$
   $I(t = 0) = \frac{U_{ind}}{R} = -2000\,\mathrm{A}$!!!!

2. $U_{ind} = -B\dot{A} = -Blv = -1{,}8\,\mathrm{mV}$

3. $U_{ind} = B\dot{A} = B\frac{\pi l^2}{T} = B\frac{\pi l^2 \omega}{2\pi} = \frac{Bl^2\omega}{2}$

4. a) $\phi_m = \int B\, dA = a \int_d^{d+b} B(r)\, dr = a \int_d d + b \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\, dr = \frac{a\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{d+b}{d} = 3{,}6\,\mu\mathrm{Vs}$
   b) $I(t) = I_{2eff}\sqrt{2}\sin\omega t$
   $U_{ind} = -\frac{d}{dt}\phi_m$
   $\Rightarrow U_{1eff} = a\mu_0 I_{eff} f \ln(\frac{d+b}{d}) = 1{,}1\,\mathrm{mV}$

5. a) $Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{\omega C})^2} = 101\,\Omega$
   $\arctan\varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = -9{,}5^\circ$
   b) Da durch alle Schaltelemente aufgrund der Serienschaltung zu jedem Zeitpunkt derselbe Strom fließt, ist das Verhältnis der Spannungen äquivalent zum Verhältnis der Widerstände, also ist die Forderung $U_{Leff} = 2U_{eff}$ gleichbedeutend mit $X_L = 2Z \Rightarrow L\omega = 2(L\omega - \frac{1}{\omega C^*}) \Rightarrow C^* = \frac{2}{L\omega^2} = 5{,}1\,\mu\mathrm{F}$

6. a) $X_C = \frac{1}{\omega C} = 4{,}5\,\Omega$
   b) Zur Berechnung des Scheinwiderstandes benutze man ein Zeigerdiagramm (U auf der x-Achse, da U für alle Verbraucher gleich ist, und den Strom durch die Schaltelemente mit der passenden Phasenverschiebung eintragen). Dadurch kann man die Ströme dann (vektoriell) addieren:

   $$I_{ges} = \sqrt{I_R^2 + I_C^2}$$

   $$\Rightarrow Z = \frac{R}{\sqrt{1 + (R\omega C)^2}} = 2{,}5\,\Omega$$

   c) $I_{eff} = \frac{U_{eff}}{Z} = 4\,\mathrm{A}$
   d) $I_{Ceff} = U_{eff}\omega C = 2{,}2\,\mathrm{A}$ und $I_{Reff} = \frac{U_{eff}}{R} = 3{,}3\,\mathrm{A}$
   e) $\varphi = \arctan R\omega C = -33^\circ$
   f) $P_S = U_{eff} I_{eff} = 40\,\mathrm{W}$

g) $Q = P_R t = U_{eff} I_{Reff} t = 33$ J h) Um die Phasenverschiebung aufzuheben muss der Strom durch Kondensator und Spule gleich groß sein (Zeigerdiagramm!), also $I_C = I_L$ und somit:

$$L = \frac{1}{C\omega^2} = 1,4\,\mathrm{mH}$$

7. a) $I_{eff} = \frac{U_{eff}}{\sqrt{R^2+(L\omega-\frac{1}{\omega C})^2}} = 0,89\,\mathrm{A}$
   mit: $R = R_1 + R_2 + R_3$, $L = L_1 + L_2$, $C = C_1 + C_2$
   b) $P_R = I_{eff}^2 R = 71\,\mathrm{W}$
   c) $Q = 4,26\,\mathrm{kJ}$

8. a) Hochpass: $\frac{U_{eff}}{U_{0eff}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{(R\omega C)^2}}}$
   Tiefpass: $\frac{U_{eff}}{U_{0eff}} = \frac{1}{\sqrt{1+(R\omega C)^2}}$
   b) Bei sehr hohen Frequenzen gilt für den Hochpass $U_{eff} \to U_{0eff}$, wohingegen beim Tiefpass $U_{eff} \to 0$. Bei sehr kleinen Frequenzen verhält es sich genau anders herum.

9. a) Mit der Maschenregel gelangt man zur DGL:

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = U_0 e^{i\omega t}$$

b) Nun muss zunächst obige DGL gelöst werden. Ansatz: $Q(t) = Ae^{i\omega t}$

$$\Rightarrow A = \frac{U_0}{-L\omega^2+iR\omega+\frac{1}{C}}$$

Die Amplitude von Q ist der Betrag der komplexen Zahl A, also

$$|A| = \frac{U_0}{\sqrt{(L\omega^2-\frac{1}{\omega})^2+R^2\omega^2}}$$

Die Resonanzfrequenz ist diejenige Frequenz, bei der $|A|$ möglichst groß ist, als sollte der Wurzelausdruck minimal werden. Wegen der Abhängigkeit von ω^2 wird nach ω^2 abgeleitet und die Ableitung anschließend null gesetzt. Man erhält dann:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}$$

c) Im eingeschwungenen Zustand und in reeller Form gilt für die Ladung:

$$Q(t) = |A(\omega)| \cos(\omega t + \varphi)$$

Die Leistung, die im Widerstand in Wärme umgewandelt wird erhält man mit:

$$P = R\dot{Q}^2$$

Man erkennt, da R=const. und $\sin^2$ periodisch, dass $|A(\omega)|^2\,\omega^2$ maximal werden muss, also wieder Ableiten nach ω^2 und Nullsetzen der Ableitung. Dies liefert:

$$(L\omega^2 - \frac{1}{C})(L\omega^2 + \frac{1}{C}) = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC}$$

Somit ist die Leistungsaufnahme eines Schwingkreises maximal bei der Eigenfrequenz des ungedämpften Systems!!

10. a) auch hier wieder die Anwendung der Maschenregel, um auf die DGL zu kommen:

$$\dot{I} + \frac{R}{L}I = \frac{U}{L}$$

Die Lösung dieser DGL ist die Summe aus der allgemeinen homogenen Lösung und einer speziellen inhomogenen Lösung:

$$I(t) = A \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U}{R}$$

Nun muss man noch die Anfangsbedingungen $I(0) = 0$ und $\dot{I}(0) = \dot{I}_0$ verwenden und gelangt schließlich zu der bekannten Form:

$$I(t) = \frac{U}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

c) Die Zeit bei der der Strom 90 Prozent seines Maximalwertes erreicht hat berechnet sich folgenerdmaßen:

$$I(t) = 0,9\frac{U}{R} = \frac{U}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

Auflösen nach t liefer schließlich: $t = \frac{L}{R}\ln 10$

Die bis zu diesem Zeitpunkt t verbrauchte Leistung berechnet sich zu:

$$P(t) = \int_0^t RI^2\,dt = R\int_0^t \frac{U^2}{R^2}(1 - 2e^{-\frac{R}{L}t} + e^{-\frac{2R}{L}t})\,dt = 0,042\,\mathrm{J}$$