

# Musterlösung

## Experimentalphysik II - Ferienkurs

Andreas Schindewolf

### 1 Bimetallthermometer

- a) Bei einer Temperaturänderung  $\Delta T$  ändern sich die Längen der beiden Metalle unterschiedlich stark und verbiegen sich deshalb. Da wir annehmen können, dass durch die Fixierung der Abstand  $d$  der beiden Metallstäbe konstant bleibt, folgt, dass die beiden Stäbe zwei Kreissegmente über den Winkel  $\phi$  mit Radius  $r$  darstellen

$$\phi = \frac{L(1 + \alpha_1 \Delta T)}{r} = \frac{L(1 + \alpha_2 \Delta T)}{r + d}. \quad (1.1)$$

Nach  $r$  aufgelöst bekommt man den Radius der Kreissegmente

$$r = d \frac{1}{\frac{1 + \alpha_2 \Delta T}{1 + \alpha_1 \Delta T} - 1}. \quad (1.2)$$

Diesen Radius kann man in Gleichung (1.1) einsetzen und erhält so den Kreissegmentenwinkel  $\phi$ , um den der Zeiger des Thermometers gegenüber die Nulllage verdreht ist

$$\phi = \frac{L}{d} (\alpha_2 - \alpha_1) \Delta T. \quad (1.3)$$

- b) Der Drehwinkel  $\phi$  ist also linear zur Temperaturänderung  $\Delta T$ . Wegen der Wahl des Nullpunkt  $\phi = 0$  für  $T_0 = 0^\circ\text{C}$  gilt  $T_C = \Delta T$ . Es reicht folglich aus (1.3) nach der Temperaturänderung umzustellen

$$T_C = \frac{d}{(\alpha_2 - \alpha_1)L} (\alpha_2 - \alpha_1) \phi. \quad (1.4)$$

Nun könnte man für  $T_C = 0^\circ\text{C}$  die Stäbe gleicher Länge fixieren, dann bei Kontakt des Thermometers zu einem kochenden Wasserbad eine Markierung für  $100^\circ\text{C}$  an der Winkelskala machen und die Winkel zwischen diesem Strich und  $\phi = 0$  äquidistant einteilen, um ein geeichtes Celsius-Thermometer zu erhalten.

### 2 Messung der Wassertiefe

Die Eintauchtiefe des Rohres sei  $H$  und die Höhe der in das Rohr eindringenden Wassersäule  $h$ . Das im Rohr befindliche komprimierte Luftvolumen sei  $V$  und der äußere Luftdruck  $p_0$ . Die Querschnittsfläche des Rohres sei  $A$ . Gesucht ist nun  $H(p)$ .

An der Grenzfläche zwischen Wasser und Luft im Rohr muss der Druck  $p$  der komprimierten Luft das Wasser am Eindringen hindern. Das Wasser drängt mit dem Druck  $p_0 + \rho g(H - h)$  in das Rohr, so dass man die Gleichgewichtsbedingung aufstellen kann

$$p_0 + \rho g(H - h) = p. \quad (2.5)$$

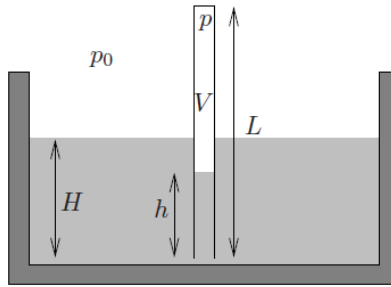


Abbildung 1: Skizze des Versuchsaufbau.

(Der Druck von unten setzt sich zusammen aus dem Druck des Beckenwassers oberhalb der Grenzfläche und dem Druck der Atmosphäre auf das Beckenwasser.) Diese Bedingung liefert  $H$  als Funktion von  $p$

$$H = \frac{p - p_0}{\rho g} + h. \quad (2.6)$$

Um die Eindringhöhe  $h$  als Funktion von  $p$  angeben zu können, benutzt man die Adiabategleichung (da die Messung unmittelbar nach der Positionierung des Rohres erfolgen soll, hat es noch nicht genügend Zeit für einen Wärmeaustausch gegeben) des 2-atomigen idealen Gases

$$pV^{\frac{7}{5}} = p_0V_0^{\frac{7}{5}}. \quad (2.7)$$

$V_0$  ist das Gesamtvolumen des Rohres. Setzt man nun  $V_0 = AL$  und  $V = A(L - h)$  ein, dann erhält man durch Auflösen nach  $h$ :

$$h = L \left( 1 - \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{5}{7}} \right). \quad (2.8)$$

Einsetzen in (2.6) liefert

$$H = \frac{p - p_0}{\rho g} + L \left( 1 - \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{5}{7}} \right). \quad (2.9)$$

Der erste Term ist das Resultat, das man erhalten würde, wenn man die Luft als inkompressibel annehmen würde, also bei verschwindender Höhe  $h$  der Wassersäule im Rohr. Der zweite Term ist die Korrektur durch die Kompressibilität der Luft. Diese ist umso größer, je länger das Rohr ist.

### 3 Verbrennung von Stahlwolle

Da der Druck konstant gehalten wird, lässt sich die am Inhalt des Zylinders verrichtete Arbeit aus der Volumenänderung des Gases gemäß

$$\Delta W = -p(V_2 - V_1) \quad (3.10)$$

berechnen. Diese ist nicht direkt gegeben. Da es sich aber um ein ideales Gas handelt, kann sie aus der Änderung der Molarität berechnet werden, denn es gilt für den Anfangs- bzw. Endzustand des Gases:

$$V_1 = \frac{n_1 RT}{p}, \quad V_2 = \frac{n_2 RT}{p} \quad (3.11)$$

woraus durch Subtraktion folgt:

$$V_2 - V_1 = \frac{(n_2 - n_1)RT}{p}. \quad (3.12)$$

Zwar sind weder  $n_2$  noch  $n_1$  bekannt, wohl aber ihre Differenz. Denn aus der Reaktionsgleichung lässt sich ableiten, dass bei der Reaktion von 2 mol Eisen 1,5 mol Sauerstoff gebunden wird

$$\Delta n = -1,5 \text{ mol.} \quad (3.13)$$

Dies wird in (3.12) verwendet um wiederum die Differenz der Volumina in (3.10) einzusetzen

$$\Delta W = -p(V_2 - V_1) = -\Delta n RT = 1,5 \text{ mol} \cdot 8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \cdot 298,15 \text{ K} = 3716 \text{ J.} \quad (3.14)$$

Am System wird also positive Arbeit verrichtet. Dies ist einleuchtend, weil das Volumen abnimmt. Da dem Zylinderinhalt zugleich die Wärme 831,08 kJ entzogen wird, ist die Änderung seiner inneren Energie

$$\Delta U = \Delta W + \Delta Q \stackrel{(3.14)}{=} 3716 \text{ J} + (-831080 \text{ J}) = -827364 \text{ J.} \quad (3.15)$$

## 4 Kritische Größen

a) Die kritische Isotherme  $p = p_{T=\text{const}}(V)$  ist durch die Bedingung, dass sie im Wendepunkt eine waagerechte Tangente hat, definiert

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{T=\text{const}} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_{T=\text{const}} = 0. \quad (4.16)$$

Aus der van-der-Waalsschen Zustandsgleichung

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT \quad (4.17)$$

also

$$p = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2} \quad (4.18)$$

folgt für (4.16):

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{T=\text{const}} = -\frac{nRT}{(V - nb)^2} + \frac{2an^2}{V^3} \stackrel{!}{=} 0, \quad (4.19)$$

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_{T=\text{const}} = \frac{2nRT}{(V - nb)^3} - \frac{6an^2}{V^4} \stackrel{!}{=} 0. \quad (4.20)$$

Dies sind nun zwei Gleichungen für die zwei kritischen Größen  $T_k$  und  $V_k$

$$\frac{nRT_k}{(V_k - nb)^2} = \frac{2an^2}{V_k^3}, \quad (4.21)$$

$$\frac{2nRT_k}{(V_k - nb)^3} = \frac{6an^2}{V_k^4}. \quad (4.22)$$

Division von (4.21) durch (4.22) ergibt

$$\frac{1}{2}(V_k - nb) = \frac{1}{3}V_k. \quad (4.23)$$

Also gilt

$$V_k = 3nb \quad (4.24)$$

bzw.

$$v_k = 3b. \quad (4.25)$$

Setzt man  $V_k$  in (4.21) oder (4.22) ein lässt sich aus der Gleichung durch umstellen die kritische Temperatur  $T_k$  bestimmen

$$T_k = \frac{8}{27} \frac{a}{bR} \quad (4.26)$$

und durch Einsetzen von  $T_k$  (4.26) und  $V_k$  (4.24) in die van-der-Waals-Gleichung (4.17) bekommt man den noch fehlenden kritischen Druck  $p_k$

$$p_k = \frac{1}{27} \frac{a}{b^2}. \quad (4.27)$$

b) Durch Einsetzen der gegebenen Größen in (4.25), (4.26) und (4.27) folgt:

$$v_k = 331,8 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{mol}} = 0,0954 \frac{1}{\text{mol}}, \quad (4.28)$$

$$T_k = \frac{8}{27} \cdot \frac{0,1378 \frac{\text{Nm}^4}{\text{mol}^2}}{31,8 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{mol}} \cdot 8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}} = 154,5 \text{ K}, \quad (4.29)$$

$$p_k = \frac{1}{27} \cdot \frac{0,1378 \frac{\text{Nm}^4}{\text{mol}^2}}{\left(31,8 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}\right)^2} = 5,05 \cdot 10^6 \text{ Pa} \quad (4.30)$$

## 5 Thermoskanne

Die Oberfläche des Thermoskanneninneren und -äußeren  $A_{\text{Zyl}}$  sind wie in der Aufgabe angegeben näherungsweise gleich und ergeben sich aus der Geometrie von Kreis und Zylinder und  $A_{\text{Querschnitt}}$  und  $h$

$$r = \sqrt{\frac{A_{\text{Querschnitt}}}{\pi}} \approx 3,57 \text{ cm}, \quad (5.31)$$

$$A_{\text{Zyl}} = 2\pi r^2 + 2\pi r h \approx 0,064 \text{ m}^2. \quad (5.32)$$

a) Es kann kein Wärmetransport durch Konvektion stattfinden. Das ist durch das Modell eines soliden Aluminiumbehälters prinzipiell ausgeschlossen.

Durch Wärmeleitung gibt die Thermoskanne gemäß dem Fourierschen Gesetz Wärme in die Umgebung ab. Es lautet zum Zeitpunkt  $t = 0$ :

$$\dot{Q}_{\text{Leitung}} = \lambda \frac{A}{d} (T_{\text{außen}} - T_{\text{innen}}) = \lambda \frac{A}{d} (T_{\text{außen}} - T_0) \approx -1,0 \text{ W}. \quad (5.33)$$

Der Wärmetransport durch Strahlung ist komplizierter, da am Aluminium immer ein Teil  $r$  der Strahlung reflektiert wird und ein Teil  $\varepsilon$  absorbiert wird (Energieerhaltung und Nichttransparenz führen zur Forderung  $r + \varepsilon = 1$ ). Es muss nun jeder Wärmebeitrag, der vom Innern der Thermoskanne ausgeht oder dort ankommt durch eine Summation erfasst werden. Grundlage dafür ist das Stefan-Boltzmann-Gesetz:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{\text{Strahlung}} = & (\varepsilon^2 \sigma A T_{\text{außen}}^4 + \varepsilon^2 (1 - \varepsilon)^2 \sigma A T_{\text{außen}}^4 + \varepsilon^2 (1 - \varepsilon)^4 \sigma A T_{\text{außen}}^4 + \dots) \\ & - (\varepsilon^2 \sigma A T_{\text{innen}}^4 + \varepsilon^2 (1 - \varepsilon)^2 \sigma A T_{\text{innen}}^4 + \dots). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Diese unendliche Reihe kann mithilfe der expliziten Formel für die geometrische Reihe ( $|q| < 1 \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ ) wesentlich vereinfacht und exakt berechnet werden:

$$\dot{Q}_{\text{Strahlung}} = \varepsilon^2 \sigma A \left( \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \varepsilon)^{2k} \right) (T_{\text{außen}}^4 - T_{\text{innen}}^4) = \quad (5.35)$$

$$= \frac{\varepsilon}{2 - \varepsilon} \sigma A (T_{\text{außen}}^4 - T_{\text{innen}}^4) = \frac{\varepsilon}{2 - \varepsilon} \sigma A (T_{\text{außen}}^4 - T_0^4) \approx -0,9 \text{ W}. \quad (5.36)$$

Mit der Extensivität der Energie können die beiden Wärmeströme zu einem Gesamt-

wärmestrom  $\dot{Q}_{ges}$  aus dem System addiert werden, der das System um den Zeitpunkt  $t = 0$  verlässt

$$\dot{Q}_{ges} = \dot{Q}_{Strahlung} + \dot{Q}_{Leitung} \underset{\substack{(5.33), \\ (5.36)}}{\approx} -1,9 \text{ W.} \quad (5.37)$$

- b) Mit der Wärmekapazität von Wasser ist es möglich die Wärmemenge  $Q_{chill}$  zu berechnen, die abgeführt werden muss, damit der Tee auf  $T = 40^\circ\text{C}$  abkühlt:

$$Q_{chill} = mc_{\text{Wasser}}\Delta T = mc_{\text{Wasser}}(-40 \text{ K}) \approx -167 \text{ kJ.} \quad (5.38)$$

Wenn diese Wärmemenge vom Wärmestrom zum Zeitpunkt  $t = 0$  abtransportiert würde, ergibt sich die Dauer  $\Delta t$  des Vorgangs wie folgt:

$$\Delta t = \frac{Q_{chill}}{\dot{Q}_{ges}} \underset{(5.37)}{\approx} 24,4 \text{ h.} \quad (5.39)$$

- c) Die Erfahrung zeigt, dass man eine Thermoskanne den Inhalt nicht bis zum Volgetag angenehm warm halten kann. Eine große Schwäche des Modells liegt darin, dass der Verschlussmechanismus unberücksichtigt bleibt. Über diese wenn auch kleine Fläche kann ein beachtlicher Teil der Wärme mit der Zeit nach außen dringen.

## 6 Die Erde als Strahler

- a) Den Wärmestrom  $\dot{Q}$  durch eine Schicht der Dicke  $\Delta x$  und Fläche  $A$  kann man aus den Temperaturen der beiden Seiten und der Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  des Materials berechnen

$$\dot{Q} = \lambda A \frac{\Delta T}{\Delta x}. \quad (6.40)$$

Die Fläche  $A$  entspricht der Erdoberfläche, die mit dem Erdradius ermittelt werden kann

$$A = 4\pi r^2 = 4\pi 6370^2 \text{ km}^2 \approx 510 \cdot 10^6 \text{ km}^2. \quad (6.41)$$

Der Temperaturgradient in der Kruste beträgt gemäß der Angabe

$$\frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{20 \text{ K}}{5000 \text{ m}} = 0,004 \frac{\text{K}}{\text{m}}. \quad (6.42)$$

Setzt man  $A$  (6.41) und  $\frac{\Delta T}{\Delta x}$  (6.42) in (6.40) ein ergibt sich

$$\dot{Q} = 2,8 \frac{\text{W}}{\text{mK}} \cdot 510 \cdot 10^{12} \text{ m}^2 \cdot 0,004 \frac{\text{K}}{\text{m}} \approx 5,71 \cdot 10^{12} \text{ W.} \quad (6.43)$$

(Jeder Quadratmeter Erdoberfläche strahlt also 11 mW Wärmeleistung ab.) Pro Tag folgt daraus:

$$Q = \dot{Q}\Delta t = 5,71 \cdot 10^{12} \text{ W} \cdot 86400 \text{ s} \approx 4,93 \cdot 10^{17} \text{ J.} \quad (6.44)$$

- b) Die Wärmeleistung der Erde ergibt sich für diese Betrachtung aus dem Stefan-Boltzmann-Gesetz

$$P = \sigma T^4 A = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \cdot (288,15 \text{ K})^4 \cdot 510 \cdot 10^{12} \text{ m}^2 \approx 1,99 \cdot 10^{17} \text{ W.} \quad (6.45)$$

(Dies entspricht 392 W pro Quadratmeter.) Für die pro Tag abgestrahlte Wärmemenge ergibt sich:

$$Q = P\Delta t = 1,99 \cdot 10^{17} \text{ W} \cdot 86400 \text{ s} \approx 1,72 \cdot 10^{22} \text{ J.} \quad (6.46)$$

Die Ergebnisse aus a) und b) weichen also ca. um einen Faktor  $10^5$  voneinander ab. Das liegt daran, dass der Wärmestrom in a) tatsächlich nur die Energie enthält, die aus dem Erdinneren stammt (durch den Zerfall radioaktiver Elemente im Erdmantel bzw. Erdkern). Demgegenüber besteht die von der Erde ausgehende Schwarze Strahlung hauptsächlich aus (direkt oder indirekt) reflektiertem Sonnenlicht. Diese ist erheblich intensiver als die aus der Erdoberfläche sickende Zerfallswärme.

## 7 Zylinder mit Kolben

(In a), b) und c) ist der jeweilige Anfangszustand immer mit dem Index 0 gekennzeichnet, der jeweilige Endzustand immer ohne Index – ohne Rücksicht darauf, dass der Anfangszustand von Aufgabenteil b) der Endzustand von Aufgabenteil a) ist etc.)

(Es gibt mehrere Möglichkeiten die Aufgabenteile zu bearbeiten z.B. auch über den Energieansatz. Dabei kann es durchaus sein, dass ein anderer Ansatz schneller und eleganter als die hier vorgeführten Rechenwege ist.)

- a) Die Kompression soll schnell stattfinden, d.h. die Zustandsänderung ist adiabatisch. Die Adiabatengleichung für das ideale Gas merkt man sich in der Form

$$pV^\kappa = \text{const} \quad (7.47)$$

wobei  $\kappa$  der Adiabatenindex ist und den Wert  $\frac{5}{3}$  für ein 1-atomiges Gas hat. In der Aufgabe ist zunächst nach der Temperatur gefragt, also bringt man die Adiabatengleichung mit Hilfe der idealen Gasgleichung in eine Form, die Volumen und Temperatur verknüpft: Mit der Zustandsgleichung

$$pV = nRT \rightarrow p = \frac{nRT}{V} \quad (7.48)$$

wird die Adiabatengleichung (7.47) zu

$$nRTV^{\kappa-1} = \text{const} \quad (7.49)$$

bzw.

$$T = T_0 \left( \frac{V_0}{V} \right)^{\kappa-1}. \quad (7.50)$$

Einsetzen der gegebenen Werte gibt:

$$T = 293 \text{ K} \cdot \left( \frac{51}{1,251} \right)^{\frac{2}{3}} = 738 \text{ K} \approx 465 \text{ }^\circ\text{C}. \quad (7.51)$$

Der neue Druck ergibt sich aus der Standardform der Adiabatengleichung (7.47)

$$p = p_0 \left( \frac{V_0}{V} \right)^\kappa \quad (7.52)$$

zu

$$p = 1013 \text{ hPa} \cdot \left( \frac{51}{1,251} \right)^{\frac{5}{3}} = 10210 \text{ hPa} \approx 10 \text{ atm}. \quad (7.53)$$

- b) Bei der isochoren Abkühlung gilt gemäß der idealen Gasgleichung (7.48)

$$p = \frac{T}{T_0} p_0. \quad (7.54)$$

In unserem Fall:

$$p = \frac{293 \text{ K}}{738 \text{ K}} \cdot 10210 \text{ hPa} = 4053 \text{ hPa}. \quad (7.55)$$

(Dies sind genau 4 atm, da die Schritte a) und b) äquivalent sind zu einer isothermen Kompression auf ein Viertel des Anfangsvolumens.)

- c) Das Endvolumen  $V$  folgt aus der Bedingung, dass das Gas auf Normaldruck expandiert, mit Hilfe der nach  $V$  aufgelösten Standard-Adiabatengleichung (7.47):

$$V = \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{1}{\kappa}} V_0 = \left( \frac{4053 \text{ hPa}}{1013 \text{ hPa}} \right)^{\frac{3}{5}} \cdot 1,251 \approx 2,871. \quad (7.56)$$

Mit (7.50) ergibt sich damit für die Endtemperatur

$$T = 293 \text{ K} \cdot \left( \frac{1,251}{2,871} \right)^{\frac{2}{3}} \approx 168 \text{ K} \approx -105 \text{ }^\circ\text{C}. \quad (7.57)$$

d) Die an einem idealen Gas verrichtete Arbeit ist gegeben durch das Integral

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV. \quad (7.58)$$

Im adiabatischen Fall gilt

$$p(V) = p_1 \left( \frac{V_1}{V} \right)^\kappa. \quad (7.59)$$

Also

$$W = -p_1 V_1^{\kappa} \int_{V_1}^{V_2} V^{-\kappa} dV = -p_1 V_1^{\kappa} \frac{1}{1-\kappa} [V^{1-\kappa}]_{V_1}^{V_2} = \frac{p_1 V_1^{\kappa}}{\kappa-1} (V_2^{1-\kappa} - V_1^{1-\kappa}). \quad (7.60)$$

In diesem Fall gibt es Arbeitsverrichtung in Teil a) und c):

$$\text{a): } V_1 = 5 \text{ l, } V_2 = 1,25 \text{ l, } p_1 = 1013 \text{ hPa}; \quad (7.61)$$

$$\text{c): } V_1 = 1,25 \text{ l, } V_2 = 2,871 \text{ l, } p_1 = 4053 \text{ hPa}. \quad (7.62)$$

Daraus folgt:

$$W_a = \frac{1013 \text{ hPa} \cdot (5 \text{ l})^{\frac{5}{3}}}{\frac{2}{3}} \left( (1,25 \text{ l})^{-\frac{2}{3}} - (5 \text{ l})^{-\frac{2}{3}} \right) \approx 1155 \text{ J}; \quad (7.63)$$

$$W_c = \frac{4053 \text{ hPa} \cdot (1,25 \text{ l})^{\frac{5}{3}}}{\frac{2}{3}} \left( (2,871 \text{ l})^{-\frac{2}{3}} - (1,25 \text{ l})^{-\frac{2}{3}} \right) \approx -323 \text{ J}. \quad (7.64)$$

(Die Vorzeichen sind korrekt: Im Schritt a) ist positive Arbeit am Gas verrichtet worden, Kompression, im Schritt c) Expansion, das Gas hat selbst Arbeit verrichtet.)

Die gesamte am Gas verrichtete Arbeit  $W$  ist also

$$W = W_a + W_c = 831 \text{ J}. \quad (7.65)$$

Die dem dem Gas zugeführte Wärmemenge  $Q$  ergibt sich per Energieerhaltung

$$U_{\text{nachher}} = U_{\text{vorher}} + W + Q, \quad (7.66)$$

also

$$Q = \Delta U - W. \quad (7.67)$$

Wegen

$$U = \frac{3}{2} pV \quad (7.68)$$

gilt

$$U_{\text{vorher}} = \frac{3}{2} \cdot 1013 \text{ hPa} \cdot 5 \text{ l} \approx 760 \text{ J}; \quad (7.69)$$

$$U_{\text{nachher}} = \frac{3}{2} \cdot 4053 \text{ hPa} \cdot 2,871 \text{ l} \approx 436 \text{ J} \quad (7.70)$$

und damit

$$Q = (436 \text{ J} - 760 \text{ J}) = -323 \text{ J}. \quad (7.71)$$

Die dem Gas entzogene Wärme ist also

$$-Q = 323 \text{ J}. \quad (7.72)$$

Es ist also mehr Wärme entzogen worden als Arbeit hineingesteckt wurde. ( $\rightarrow$  Wärmepumpe)