Aufgaben zur Experimentalphysik II: Elektrostatik I

William Hefter - 07/09/2009

1 Ladung, Coulomb-Gesetz und E-Feld

1. **(a)** Positive Ladungen von welchen (gleichen) Beträgen müsste man auf Erde und Mond bringen, um die Schwerkraftsanziehung zwischen ihnen zu kompensieren? Wieso ist das Ergebnis unabhängig von der Entfernung Erde-Mond? **(b)** In wie viel kg Wasserstoff wäre die in (a) berechnete positive Ladung als Kernladung vorhanden?

2. Zwei identische, kleine leitende Kugeln der identischen Masse und Ladung m bzw. q seien jeweils am Ende von Fäden der Länge L aufgehängt, die einen gemeinsamen Aufhängepunkt haben. Die Kugeln stoßen sich ab, so dass die Fäden jeweils den Winkel θ mit der Flächennormale am Aufhängepunkt bilden, also zueinander den Winkel 2θ haben. θ sei für eine Kleinwinkelnäherung hinreichend klein. Der Abstand der beiden Kugeln sei x. Zeigen Sie, dass im Gleichgewicht gilt

$$x = \left(\frac{q^2 L}{2\pi\epsilon_0 mg} \right)^{1/3}$$

3. Gegeben sei die Anordnung in Abb. 1: Der Stab sei lang, nichtleitend und in seinem Mittelpunkt drehbar um eine Achse gelagert. Ferner sei er mit der Masse W belastet. Alle Ladungen sind positiv. Bei welchem Abstand x befindet sich der Stab in horizontaler Lage im Gleichgewicht?

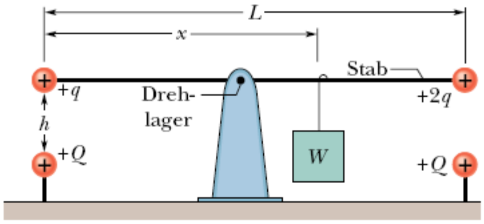

Abbildung 1: Aufgabe 1.3

4. Die beiden Punktladungen $q_1 = 2,1 \cdot 10^{-8}$C und $q_2 = -4q_1$ seien im Abstand von 50cm fixiert. In welchem Punkt einer Geraden, die durch beide Ladungen verläuft, ist das resultierende elektrische Feld null?

5. Betrachten Sie einen Stab der Länge L, der auf der x-Achse liegt und die Ladung $-q$ trägt. Der Stab sei nichtleitend. **(a)** Wie groß ist die lineare Ladungsdichte auf dem Stab? **(b)** Wie groß sind Betrag und Richtung des elektrischen Felds im Punkt P, der im Abstand a vom Ende des Stabs auf der x-Achse liegt? **(c)** Zeigen Sie, dass der Stab für $a \gg L$ für einen Betrachter in P wie eine Punktladung aussieht.

6. Sie kennen schon den Ausdruck für das E-Feld entlang der mittleren Achse eines geladenen Ringes. Leiten Sie damit einen Ausdruck für das E-Feld einer geladenen Scheibe mit homogener Flächenladungsdichte σ entlang dessen mittlere Achse her. Zeigen Sie, dass für $R \gg z$ und $z \approx 0$ das Feld in das einer unendlich ausgedehnten, nichtleitenden geladenen Ebene übergeht. Kontrollergebnis für das E-Feld:

$$\vec{E} = \vec{e_z} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \right]$$

7. Ein Elektron wird unter einem Anfangswinkel $\theta = 45\,^\circ$ in einem Plattenkondensator reingeschossen (vgl Abb. 2). Die Anfangsgeschwindigkeit ist $v_0 = 6 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, das E-Feld beträgt $2\frac{\text{kV}}{\text{m}}$. Weiter sind $d = 2$cm, $L = 10$cm. **(a)** Trifft das Elektron eine der Platten? **(b)** Welche Platte wird gegebenenfalls getroffen und in welcher horizontalen Entfernung vom Einschusspunkt?

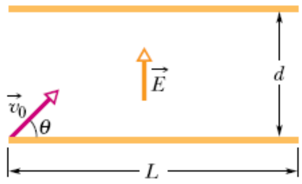

Abbildung 2: Aufgabe 1.7

2 Gauß'scher Satz

1. Man hat experimentell herausgefunden, dass das elektrische Feld in einer bestimmten Schicht der Erdatmosphäre vertikal nach unten gerichtet ist. In einer Höhe von 300m beträgt die Feldstärke $60\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$, in einer Höhe von 200m beträgt sie $100\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$. Welche Ladungsmenge ist in einem Würfel von 100m Kantenlänge enthalten, dessen horizontale Flächen in 200m respektive 300m Höhe liegen? (Erdkrümmung ist zu vernachlässigen.)
2. Ein von der Umgebung isolierter Leiter von beliebiger Gestalt trage die Gesamtladung von $10 \cdot 10^{-6}$C. In einem Hohlraum innerhalb des Körpers befinde sich eine Punktladung von $q = 3 \cdot 10^{-6}$C. Wie groß ist die Ladung **(a)** auf der Wand des Hohlraums und **(b)** auf der äußeren Oberfläche des Körpers?
3. Betrachten Sie einen langen, leitenden zylindrischen Stab der Länge L mit einer Gesamtladung $+q$, der umhüllt ist von einer zylindrischen, leitenden Röhre, die ebenfalls die Länge L hat und eine Gesamtladung $-2q$ trägt. Verwenden Sie den Satz von Gauß, um **(a)** das elektrische Feld in Punkten außerhalb der Röhre, **(b)** die Ladungsverteilung auf der Röhre, **(c)** das elektrische Feld im Bereich zwischen Stab und Röhre zu berechnen.
4. Ein Elektron wird im rechten Winkel mittig auf eine sehr große Metallplatte geschossen, die mit einer Flächenladungsdichte von $\sigma = 2 \cdot 10^{-6}\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$ negativ geladen ist. Das Elektron mit einer anfänglichen kinetischen Energie von 100eV wird bei Annäherung an die Platte durch die elektrostatische Abstoßung gebremst und erreiche die Plattenoberfläche mit der Geschwindigkeit Null. In welcher Entfernung von der Plattenoberfläche muss das Elektron abgeschossen worden sein?
5. Betrachten Sie eine Kugel mit Radius a und homogen verteilter Ladung $+q$, die konzentrisch innerhalb eine leitenden Kugelschale mit dem inneren Radius b und dem äußeren Radius c liegt. Die Gesamtladung dieser Kugelschale beträgt $-q$. Leiten Sie Ausdrücke her für das elektrische Feld als Funktion des Abstands r vom Zentrum in den folgenden Bereichen: **(a)** innerhalb der Kugel **(b)** im Raum zwischen Kugel und Kugelschale **(c)** innerhalb der Kugelschale **(d)** außerhalb der Kugelschale. **(e)** Wie groß sind die Ladungen auf der inneren sowie der äußeren Oberfläche der Kugelschale?
6. In der Mitte einer nichtleitenden Kugelschale mit innerem Radius a, äußerem Radius b sitzt eine positive Punktladung q. Die Kugelschale hat die inhomogene Raumladungsdichte $\rho(r) = \frac{A}{r}$, wobei A eine Konstante ist, die von a abhängen kann. Welchen Wert muss die Konstante A haben, damit das elektrische Feld innerhalb der Schalendicke homogen ist (also unabhängig von r)?

3 Das elektrostatische Potential

1. Berechnen Sie das E-Feld **innerhalb** einer nichtleitenden Kugel mit Radius R, die eine homogen verteilte Ladung q trägt.
   a) Im Folgenden sei nun der Nullpunkt des Potentials $\phi = 0$ im **Mittelpunkt** der Kugel definiert.
      i. Bestimmen Sie das elektrische Potential $\phi(r)$ innerhalb der Kugel.
      ii. Wie groß ist die Potentialdifferenz zwischen einem Punkt auf der Oberfläche und dem Mittelpunkt der Kugel?
      iii. Welcher der beiden Punkte liegt auf einem höheren Potential, wenn q positiv ist?
   b) Nun sei der Nullpunkt im Unendlichen definiert, also $\phi(\infty) = 0$. Wiederholen Sie i) und ii) aus a) für diese neue Eichung. Warum unterscheiden sich die beiden Ergebnisse für i), nicht aber die für ii)?

2. Abb. 3 zeigt ein Rechteck mit Seitenlängen 5cm und 15cm, die Ladungen seien gegeben zu $q_1 = -5\mu C$, $q_2 = 2\mu C$. Wie groß ist das elektrische Potential **(a)** im Endpunkt A, **(b)** im Eckpunkt B (relativ zu $\phi(\infty) = 0$)? **(c)** Welche Arbeit ist erforderlich, um eine dritte Ladung $q_3 = 3\mu C$ quasistatisch entlang einer Diagonalen des Rechtecks vom Punkt B zum Punkt A zu bewegen? **(d)** Vergrößert oder verkleinert diese Arbeit die elektrische Energie des Systems aus drei Ladungen? **(e)** Ist mehr, weniger oder die gleiche Arbeit erforderlich, um die Ladung q_3 zwischen B und A auf Wegen zu führen, die innerhalb bzw. außerhalb des Rechtecks liegen?

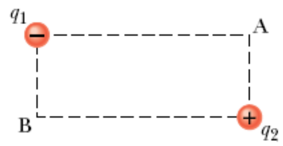

Abbildung 3: Aufgabe 3.2

3. Der (hohle) Metallzylinder eines Geigerzählers hat einen Durchmesser von 2cm. Entlang der Zylinderachse sei ein Draht vom Durchmesser $1,3 \cdot 10^{-4}$cm eingespannt. Die Potentialdifferenz zwischen Draht und Zylinder betrage 850V. Wie groß ist das elektrische Feld **(a)** an der Oberfläche des Drahts und **(b)** an der Oberfläche des Zylinders? (Beachten Sie: Hier ist keine Längenladungsdichte gegeben, sondern eine Potentialdifferenz. Stellen Sie Ausdrücke für $\vec{E}$ sowie $\Delta\phi$ auf.)

4. Zeigen Sie mittels direkter Berechnung, dass das Potential eines geladenen Rings mit Ladung q und Radius z entlang dessen mittlerer Achse z gegeben ist durch

$$\phi(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

Leiten Sie aus diesem Ausdruck das elektrische Feld her und vergleichen Sie dieses mit dem in der Vorlesung berechneten.

5. Wie groß ist das von den vier Punktladungen nach Abb. 4 im Punkt P erzeugte, resultierende Potenzial (mit $\phi(\infty) = 0$)?

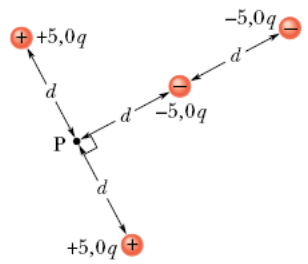

Abbildung 4: Aufgabe 3.5

6. Die Potentialdifferenz zwischen einer Wolke und Erde bei einem Blitz, der eine Ladung von 30C transportiert, betrage 10^9V. Um welchen Betrag vermindert sich die Energie der Ladung bei ihrem Transport von der Wolke zur Erde?

4 Kapazität und Kondensator

1. Berechnen Sie die Kapazität eines Zylinderkondensators (zwei konzentrische Zylinder mit den Radien $a < b$).

2. Berechnen Sie die Kapazität eines Kugelkondensators (zwei konzentrische Kugelschalen mit den Radien $a < b$). Berechnen Sie damit die Kapazität der Erde ($R_e = 6370$km).

3. Eine Batterie lädt einen Kondensator der Kapazität 100pF auf eine Potentialdifferenz von 50V, dann wird die Batterie abgeklemmt. Nun wird ein zweiter, zunächst ungeladener Kondensator parallel geschaltet. Dabei fällt die Potentialdifferenz am ersten Kondensator auf 35V ab. Wie groß ist die Kapazität des zweiten Kondensators?

4. Ein Plattenkondensator mit einer Plattenfläche A und einem Plattenabstand d wird von einer Batterie auf eine Potentialdifferenz U geladen. Nun entfernt man die Batterie und zieht die Platten bis auf eine Entfernung $2d$ auseinander. Leiten Sie Ausdrücke als Funktionen von A, d und U her für **(a)** die Potentialdifferenz nach dem Auseinanderziehen der Platten, **(b)** die im Kondensator gespeicherten Energien vor (E_i) und nach (E_f) dem Auseinanderziehen, **(c)** die zum Auseinanderziehen der Platten erforderliche Arbeit.

5 Materie im elektrischen Feld: Dielektrika

1. Leiten Sie einen Ausdruck für die induzierte Oberflächenladungsdichte σ' auf der Oberfläche eines Dielektrikums in Abhängigkeit von σ_0 (Ladungsdichte auf dem Kondensator) und ϵ_r her. Zeigen Sie damit weiter, dass $\left|\vec{P}\right| = \sigma'$. (Nehmen Sie wie in der Vorlesung an, dass das $\vec{E}$-Feld immer senkrecht auf den Kondensatorplatten sowie der Oberfläche des Dielektrikums steht.)

2. Zeigen Sie die in der Vorlesung aufgestellten Behauptungen; dass Kondensatoren mit Dielektrika parallel (links) oder in Reihe (rechts) (Abb. 5 sich wie eine Parallel- bzw Reihenschaltung von mehreren Kondensatoren mit jeweils einem Dielektrikum verhalten.

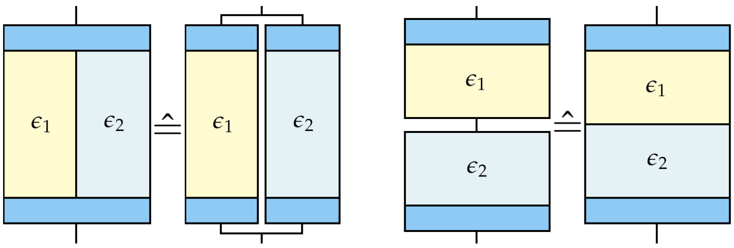

Abbildung 5: Aufgabe 5.2

3. Berechnen Sie die Kapazität des in Abb. 6 gezeigten Kondensators:

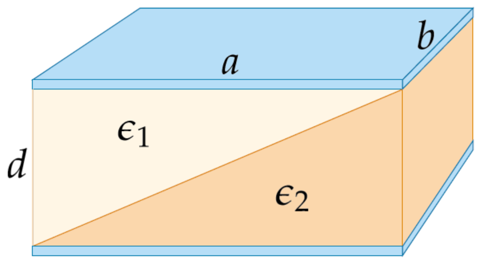

Abbildung 6: Aufgabe 5.3

Setzen Sie dann $\epsilon_1 = \epsilon_2$ und überprüfen Sie, ob Sie die Formel für den mit einem einzelnen Dielektrikum gefüllten Kondensator erhalten, ob Ihr Ergebnis also richtig ist.