Ferienkurs Analysis 3 - Probeklausur - Musterlösung

Ralitsa Bozhanova, Max v. Vopelius

12.08.2009

1 Elementare Lösungsmethoden

Gegeben ist die DGL

$$y'(x) = -\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$$

Es sei $f(x,y) = x^2 - y^2, g(x,y) = 2xy$ und $x > 0, y > 0$.

In dieser Aufgabe ist jeweils nur eine Antwort richtig!

(a) Aus welcher Ungleichung kann man schließen, dass die DGL nicht exakt ist?

$\square\ \partial_x f \neq \partial_y g \quad \square\ \partial_x f \neq -\partial_y g \quad \bullet\ \partial_y f \neq \partial_x g \quad \square\ \partial_y f \neq -\partial_x g$

(b) Welche Gleichung muss ein integrierender Faktor $h(x)$ erfüllen

$\bullet h(\partial_y f - \partial_x g) = h'g \quad \square\ \partial_x(hf) = \partial_y(hg) \quad \square\ h\partial_y f = h\partial_x g \quad \square\ h'\partial_x g = h\partial_y h$

(c) Welche der folgenden Funktionen sind integrierende Faktoren für die DGL?

$\square\ h(x) = -\frac{2}{x} \quad \bullet\ h(x) = \frac{1}{x^2} \quad \square\ h(x) = \frac{x^3}{3} \quad \square\ h(x) = -\frac{1}{2}\log x$

(d) Für welche Funktion gilt $V(x, y(x)) = const$, falls $y(x)$ eine Lösung der DGL ist?

$\square\ V(x,y) = \frac{x^2-y^2}{y} \quad \square\ V(x,y) = x(y^2 - \frac{1}{3}x^2) \quad \bullet\ V(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x} \quad \square\ V(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x}$

(e) Welche der folgenden Funktionen $y : (0,1) \to \mathbb{R}$ ist eine Lösung der DGL?

$\bullet\ y(x) = \sqrt{x(1-x)} \quad \square\ y(x) = \sqrt{x^2 - x} \quad \square\ y(x) = \sqrt{x(x^2+1)} \quad \square\ y(x) = x + \sqrt{1-x}$

Lösung

(a) Damit $\frac{f}{g}$ ein Gradientfeld ist, muss

$$\partial_y f = \partial_x g$$

gelten. Ist $V(x,y)$ ein Potenzial dazu, so gilt nämlich

$$\frac{d}{dx}V(x,y(x)) = f(x,y(x)) + g(x,y(x))y'(x) = 0$$

falls y die DGL erfüllt

(b) $h(x)$ ist ein integrierender Faktor, falls

$$\frac{d}{dx}(h(x)f(x,y)) = \frac{d}{dx}(h(x)g(x,y))$$

gilt

(c) Eingesetzt ergibt sich

$$h(x)(-2y) = h'(x)2xy + h(x)2y$$

bzw. $h'(x) = -\frac{2}{x}h(x)$, also ist $h(x) = c\frac{1}{x^2}$ eind integrierender Faktor für $c \neq 0$

(d) Es muss gelten

$$\begin{aligned}\partial_x V(x,y) &= h(x)f(x,y) = 1 - \frac{y^2}{x^2}\text{und}\\ \partial_y V(x,y) &= h(x)g(x,y) = 2\frac{y}{x}\end{aligned}$$

Dies wird nur erfüllt von$V(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x}$

(e) Löst man $V(x,y) = c$ nach y enthält man $y(x) = \sqrt{cx - x^2}$, da $y > 0$. Die angegebene Lösung erhölt man für $c = 1$

2 Potenzreihen

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$\begin{aligned}f'(t) - f(t)t &= b(1-t^2)\\ f(0) &= 1\end{aligned}$$

mit einer Konstante $b \in \mathbb{C}$ erfüllt. Gehen Sie davon aus, daß die Lösung f in einer Umgebung von 0 in eine Potenzreihe entwickelbar ist, d.h

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

a) Welche Werte nehmen die ersten vier Koeffizienten an?

- • $c_0 = 1 \quad c_1 = b \quad c_2 = \frac{1}{2} \quad c_3 = 0$
- ☐ $c_0 = 1 \quad c_1 = -b \quad c_2 = \frac{1}{2}(1-b) \quad c_3 = b$
- ☐ $c_0 = 1 \quad c_1 = b \quad c_2 = \frac{1}{2} \quad c_3 = \frac{1}{2}b$
- ☐ $c_0 = 1 \quad c_1 = -b \quad c_2 = \frac{1}{2}(1-b) \quad c_3 = 0$

b) Welche Rekursionsgleichung erfüllen die Koeffizienten für $l = 2, 3, \ldots$

- • $c_{l+2} = \frac{1}{l+2} c_l$
- ☐ $c_{l+2} = \frac{1-b}{l+2} c_l$
- ☐ $c_{2l+1} = \frac{1}{2l+2} c_{2l}$
- ☐ $c_{l+1} = \frac{1}{l+1} c_l$

c) Welche explizite Darstellung der Koeffizienten trifft für $b = 0$ zu?

- ☐ $c_{2l} = \frac{1}{2l!} \quad l \in \mathbb{N}$
- • $c_{2l} = \frac{1}{2^l l!} \quad l \in \mathbb{N}$
- ☐ $c_{2l+1} = 1 \quad l \in \mathbb{N}$
- • $c_{2l+1} = 0 \quad l \in \mathbb{N}$

d) Geben Sie den Konvergenzradius R der so bestimmten Potenzreihe an.

- ☐ $R = 0$
- ☐ $R = 2$
- • $R = \infty$
- ☐ $R = 1$

Lösung

Die DGL

$$\begin{aligned} f'(t) - f(t)t &= b(1-t^2) \\ f(0) &= 1 \end{aligned}$$

ergibt mit Potenzreihenanasatz

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n n t^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+1} = b(1-t^2)$$

bzw.

$$c_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_{n+1}(n+1) - c_{n-1}) t^n = b(1-t^2)$$

Durch Koeffizientenvergleich und die AB folgt
$$\begin{aligned} c_0 &= 1 \\ c_1 &= b \\ 2c_2 &= c_0 \\ 3c_3 - c_1 &= \end{aligned}$$

sowie die Rekursion:

$$c_{n+2}(n+2) = c_l, \quad n \geq 2$$

Im Fall $b = 0$ gilt also

$$c_{2l+1} = 0, \quad l \in \mathbb{N}$$

und

$$c_{2l} = \prod_{m=1}^{l} \frac{1}{2m} = \frac{1}{2^l l!}, \quad l \in \mathbb{N}$$

Der Konvergenradius ist also inf.

3 Linearisierung

Gegeben ist die DGL

$$\ddot{x} = \alpha \dot{x} + \frac{1}{\cosh(x)} - 1, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

(a) Schreiben Sie die Gleichung als System 1. Ordnung der Form $\dot{y} = F(y)$ mit $y \in \mathbb{R}^2$ und $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Wie lauten der Fixpunkte des Sytems?

$\square$ $(\pi, 0)$ $\bullet$ $(0, 0)$ $\square$ $(0, 1)$ $\square$ $(0, 2\pi)$

(b) Wie lautet die Linearisierung von F am Fixpunkt?

$$\square \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \square \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \bullet \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \square \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Wie lauten die Eigenwerte der Linearisierung?

$$\square\ \{0,1\} \quad \square\ \{1,\alpha\} \quad \square\ \{-1,1\} \quad \bullet\ \{0,\alpha\}$$

(d) Von welchem Typ ist der Fixpunkt?

- ☐ instabil für alle $\alpha \in \mathbb{R}$
- • rein elliptisch für $\alpha = 0$
- ☐ stabil für alle $\alpha > 0$
- ☐ rein hyperbolisch für alle $\alpha \in \mathbb{R}$

Lösung

(a) Wir setzen $y_1 = x, y_2 = \dot{x}$. Dann lautet das System :

$$\dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = \alpha y_2 + \frac{1}{\cosh(y_1)} - 1$$

und somit $F(y) = (F_1(y_1, y_2), F_2(y_1, y_2)) = (y_2, \alpha y_2 + (1/\cosh y_1) - 1)$. Der Fixpunkt des Systems ist die NST des Vektorfeldes F, d.h.

$$y^{(0)} = (0, 0)$$

(b) Die Linearisierung von F ist die Jacobi-Determinante von F

$$DF = \begin{pmatrix} \partial_{y_1} F_1 & \partial_{y_2} F_1 \\ \partial_{y_1} F_2 & \partial_{y_2} F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-\sinh y_1}{\cosh^2 y_1} & \alpha \end{pmatrix}$$

Am Fixpunkt $y^{(0)}$ finden wir also:

$$DF = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

(c) Wir berechnen die NST des charakteristischen Polynoms.

$$\det(\mathrm{DF}(\mathrm{y}^{(0)}) - \lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -(\lambda - \alpha) \end{pmatrix} = \lambda(\lambda - \alpha) \tag{1}$$

Die Eigenwerte sind also :$\{0, \alpha\}$

(d) Gemäss der Definition aus der Vodlesung ist $y^{(0)}$ nicht stabil für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ für $\alpha > 0$, rein elliptisch für $\alpha = 0$ und nicht rein hyperbolisch für alle $\alpha \in \mathbb{R}$

4 Fourier-Integrale

Gegeben ist die Funktion :

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } 0 \leq x < 1 \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

mit der zugehörigen Fourier-Transformierten $\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ikx} f(x) dx$

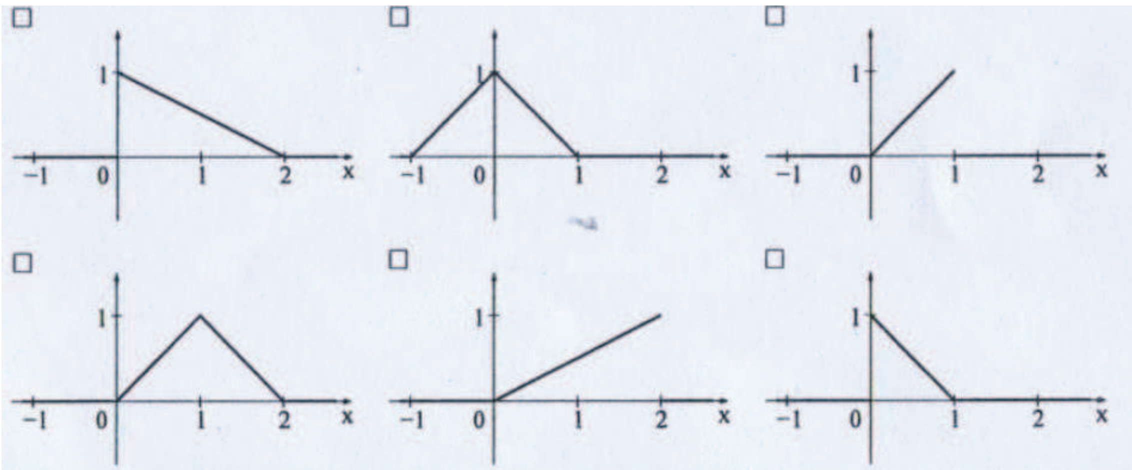
(a) Welchen Wert hat $\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 dk$?

☐ $\frac{1}{2\pi}$ • 1 ☐ 0 ☐ $\sqrt{2\pi}$ ☐ $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

(b) Welche Beziehung gilt für $k \neq 0$

☐ $\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(k)}{k}$ ☐ $\widehat{f}(k) = \frac{e^{ik}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(k)}{ik}$ ☐ $\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ik}}{k}$ • $\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1-e^{-ik}}{ik}$

(c) Welches ist der Graph von $f * f$ (Faltung)?



(d) Wie lautet die Fourier-Transformierte von $f * f$ als funktion von k

☐ $\sqrt{2\pi}|\widehat{f}(k)|^2$ ☐ $\sqrt{2\pi}\widehat{f}(k)\widehat{f}(-k)$ • $\sqrt{2\pi}\widehat{f}(k)^2$ ☐ $\sqrt{2\pi}\widehat{f}(2k)$

(e) Sei nun $g(x) = af(ax)$. Wie lautet die Fourier-Transformierte $\widehat{g}(k)$ für $a > 0$

• $\widehat{g}(k) = \widehat{f}(\frac{k}{a})$ ☐ $\widehat{g}(k) = e^{ika}\widehat{f}(k)$ ☐ $\widehat{g}(k) = a\widehat{f}(ak)$ ☐ $\widehat{g}(k) = a\widehat{f}(\frac{k}{a})$

Lösung

(a) Die Fourier-Transformation ist eine unitäre Transformation von $L^2(\mathbb{R})$ nach $L^2(\mathbb{R})$. Somit ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 dk = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = 1$$

(b)

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ikx} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-ikx}}{-ik}\right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1-^{-ik}}{ik}$$

(c)

$$(f * f)(x) = \int f(x-y)f(x)dy = \int_0^1 f(x-y)dy = \begin{cases} 0 & \text{für } x \ \leq \ 0 \\ \int_0^x dy = x & \text{für } 0 \ < \ x \ \leq 1 \\ \int_{x-1}^1 dy = 2-x & \text{für } 1 \ \leq \ x \ \leq 2 \\ 0 & \text{für } x \ > 1 \end{cases}$$

(d) Allgemein gilt $\widehat{f * g}(k) = \widehat{f}(k)\widehat{g}(k)$

(e) Es ist

$$\widehat{g}(k)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ikx} af(ax)dx =^{a>0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ik\frac{y}{a}} f(y)dy = \widehat{f}(\frac{k}{a})$$

5 Holomorphie

Verwenden Sie die Taylorentwicklung im Entwicklungspunkt $x = 0$ von $\log(1+x), x \in \mathbb{R}$, und den Identitätssatz, um zu zeigen, dass der Hauptzweig des Logarithmus log auf $B = \{z \in \mathbb{C} | |z-1| < 1\}$ mit der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n$$

übereinstimmt.

5.1 Beweis:

Der Hauptzweig des Logarithmus einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}^- := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ ist definiert als

$$\log : \mathbb{C}^- \to \mathbb{C}, z \mapsto \log z := \log |z| + i \arg z \quad \arg z \in [-\pi, pi]$$

Insbesondere ist log holomorph auf $\mathbb{C}^- \supset B_1(1)$.
f ist ebenfalls holomorph auf $B_1(1)$, da die Summe dort konvergiert und Potenzreihen in ihrem

Konvergenzgebiet holomorph sind.
Da log und f beide auf $B_1(1)$ holomorphe Funktionen sind, können wir den Identitätssatz anwenden: auf $B_1(1) \cap \mathbb{R}$ stimmen log und f überein,

$$\log x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n = f(x) \quad \forall x \in B_1(1) \cap \mathbb{R}$$

und daher müssen sie auch auf $B_1(1)$ übereinstimmen.

$$\log z = f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n$$

6 Wegintegral

Sei γ ein Weg in der komplexen Ebene, der einmal den vollen Kreis um den Ursprung vom Radius $R > 0$ im Uhrzeigersinn durchlaufe. Berechnen Sie das folgende Wegintegral

$$\int_\gamma dz \operatorname{Im} z$$

6.1 Lösung

Wir parametrisieren den umgekehrten Weg (im Gegenuhrzeigersinn) durch $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = Re^{it}$. Dann lautet das Integral

$$-\int_\gamma dz \operatorname{Im} z = -\int_0^{2\pi} dtiRe^{it}R\sin t = -iR^2 \int_0^{2\pi} dt(\cos t + i \sin t \sin t = R^2 \int_0^2 \pi dt \sin^2 t = \pi R^2$$

7 Residuen

Gegeben ist die Funktion

$$f(z) = \frac{1+z}{z^2(1-z^2)^2}$$

(a) Wie groß ist das Residuum von f an der Stelle $z = -1$?

$\square \frac{1}{2}$ $\quad \square \frac{\pi i}{2}$ $\quad \bullet \frac{1}{4}$ $\quad \square 0$ $\quad \square \frac{1}{4\pi i}$

(b) Wie lautet der Standardansatz für eine vollständige Partialbruchzerlegung von f?

$\square\ f(z) = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z^2-1} + \frac{D}{(z^2-1)^2} + E$

$\square\ f(z) = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z-1} + \frac{D}{(z-1)^2}$

$\bullet\ f(z) = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z-1} + \frac{D}{(z-1)^2} + \frac{E}{z+1}$

$\square\ f(z) = \frac{B}{z^2} + \frac{D}{(z-1)^2} + \frac{E}{z+1}$

(*c*) Wie lauten die ersten Terme der Laurent-Entwicklung von f um $z = 1$ mit den Konstanten auf (b) und geeigneten $M_0, M_1 \in \mathbb{C}$

$$\square\, f(z) = M_0 + \frac{C}{z-1} + \frac{D}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)^3} + ...$$
$$\bullet\; f(z) = \frac{D}{(z-1)^2} + \frac{C}{z-1} + M_0 + M_1(z-1) + ...$$
$$\square\, f(z) = \frac{C}{z-1} + M_0 + M_1(z-1) + ...$$
$$\square\, f(z) = \frac{D}{(z+1)^2} + \frac{C}{z+1} + M_0 + M_1(z+1)...$$

(*d*) Wie lautet eine Integraldarstellung von dem in (c) definierten M_0?

$$\square\, M_0 = \int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{f(z)}{z-1} dz \qquad \bullet\; M_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{f(z)}{z-1} dz$$
$$\square\, M_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-1|=\frac{1}{2}} (z-1)^2 f(z) dz \qquad \square\, M_0 = \int_{|z-1|=\frac{1}{2}} (z-1)^2 f(z) dz$$

(*e*) Wie lautet eine differentielle Darstellung von dem in (c) definierten M_0?

$$\square\, M_0 = \frac{d}{dz}(z-1)^2 f(z)\bigg|_{z=1} \qquad \square\, M_0 = \frac{1}{2\pi i} \frac{d^2}{dz^2}(z-1)^2 f(z)\bigg|_{z=1}$$
$$\square\, M_0 = \frac{1}{2} \frac{d^3}{dz^3}(z-1)^3 f(z)\bigg|_{z=1} \qquad \bullet\; M_0 = \frac{1}{2} d^2 dz^2 (z-1)^2 f(z)\bigg|_{z=1}$$

7.1 Lösung

Nach vollständiger Faktorisierung kann man kürzen und erhält

$$f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)^2(1+z)}$$

(*a*) f besitzt eine einfache Nullstelle bei $z = -1$. Das Residuum ist somit

$$\mathrm{Res}_{z=-1} f = \frac{1}{z^2(1-z^2)}\bigg|_{z=-1} = \frac{1}{4}$$

(*b*) Aus der vollständigen Faktorisierung lässt sich der Ansatz für die Partialbruchzerlegung direkt ablesen.

(*c*) f besitzt zweifachen Pol bei $z = 1$. Somit lautet die Laurent-Entwicklung allgemein

$$f(z) = \frac{M_{-2}}{(z-1)^2} + \frac{M_{-1}}{z-1} + M_0 + M_1(z-1) + ...$$

(*d*) Nach der Integraldarstellung für Laurentkoeffizienten gilt

$$M_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-1|=\rho} \frac{f(z)}{z-1} dz$$

für $0 < \rho < 1$.

(*e*) Benutzt man die Laurententwicklung aus (c), so erhält man

$$(z-1)^2 f(z) = D + C(z-1) + M_0(z-1)^2 + M_1(z-1)^3 ...,$$
$$\frac{d^2}{dz^2}(z-1)^2 f(z) = 2M_0 + 6M_1(z-1) + ...,$$

und somit

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}(z-1)^2 f(z)\Big|_{z=1} = M_0$$

8 Hilberträume und beschränkte Operatoren

(*a*) Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- ☐ In einem normierten Vektorraum gilt das Parallelogrammgesetz.
- • Ein normierter Vektorraum ist ein Prähilbertraum, falls das Parallelogrammgesetz gilt.
- • In einem Prähilbertraum gilt die Polarisationsidentität.
- ☐ In einem normierten Vektorraum gilt die Polarisationsidentität.

(*b*) Sei A ein beschränkter Operator auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- ☐ $||A|| = \sup_{||\psi||=1} |(\psi, A\psi)|$
- ☐ A ist unitär, falls $(A\psi, A\varphi) = (\psi, \varphi)$ für ein $\psi \in \mathcal{H}$ und ein $\varphi \in \mathcal{H}$
- • A ist hermitesch, genau falls $\psi, A\varphi) = (A\psi, \varphi)$ für alle $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$
- ☐ $\dim A \leq 1,$ falls A eine orthogonale Projektion ist.

(*c*) Sei A ein Multiplikationsoperator auf $L^2(\mathbb{R})$ der Form $(A\psi)(x) = V(x)\psi(x)$ mit $V \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- A ist beschränkt, falls $|V(x)| \leq c$ für ein $c > 0$
- A ist hermitesch, falls A beschränkt ist und $\operatorname{Im} V = 0$.
- ☐ A ist unitär.
- ☐ A ist eine orthogonale Projektion.

(d) Sei B der Operator der Verschiebung auf $l^2(\mathbb{Z})$ der Form $(B\psi)_n = \psi_{n-1}$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- $||B^*|| = ||B||$
- ☐ B ist hermitesch.
- B ist unitär.
- ☐ $||B|| < 1$

9 Norm einer orthogonalen Projektion

Sei $P \neq 0$ eine orthogonale Projektion auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Beweisen Sie, dass $||P|| = 1$.

9.1 Beweis

Eine orthogonale Projektion P ist definiert als ein beschränkter Operator auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit den Eigenschaften $P^2 = P^* = P$.

1. Möglichkeit
„$||P|| \geq 1$“: Die Submultiplikativität der Operatornorm ergibt:

$$||P|| = ||P^2|| \leq ||P||^2$$

woraus $||P|| \geq 1$ folgt, da $||P|| \neq 0$.

„$||P|| \leq 1$“: Unter Anwendung der Schwarzschen Ungleichung erhält man

$$||P\psi||^2 = (P\psi, P\psi) = (\psi, P^*P\psi) = (\psi, P^2\psi) = (\psi, P\psi) \leq ||P||||\psi||^2$$

Anwenden des Supremums über alle normierten ψ liefert $||P||^2 \leq ||P||$, da $\sup_{||\psi||=1}(||P\psi||^2) = (\sup_{||\psi||=1}||P\psi||)^2$, und somit ist $||P|| \leq 1||$, da $||P|| \neq 0$.

2. Möglichkeit

Da $P^* = P$, gilt

$$||P|| = \sup_{||\psi||=1} |(\psi, P\psi)| = \sup_{||\psi||=1} |(P\psi, P\psi)| = \sup_{||\psi||=1} ||P\psi||^2 = ||P||^2$$